

А. П. Котельников

ВИНТОВОЕ СЧИСЛЕНИЕ

**И НЕКОТОРЫЕ
ПРИЛОЖЕНИЯ ЕГО
К ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКЕ**



ВИНТОВОЕ СЧИСЛЕНИЕ

и

НЕКОТОРЫЯ ПРИЛОЖЕНИЯ ЕГО

КЪ ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКѦ

A. P. Котельников

профессор-доцент Императорского Казанского Университета

А. П. Котельников

**ВИНТОВОЕ СЧИСЛЕНИЕ
И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ЕГО
К ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКЕ**

Издание второе, стереотипное



URSS

МОСКВА

Котельников Александр Петрович

Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике.

Изд. 2, стереотипное. — М.: КомКнига, 2006. — 224 с.

Автор настоящей книги — известный российский математик А. П. Котельников (1865–1944) — ввел понятие векторов особого рода, так называемых «винтов», тесно связанных с комплексными числами. В книге описан математический аппарат винтового исчисления, аналогичный векторному, что позволило обосновать исходные положения механики независимо от типа неевклидова пространства и найти важные геометрические приложения.

Книга будет интересна математикам и механикам — научным работникам, преподавателям, аспирантам и студентам естественных вузов.

Издательство «КомКнига». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Формат 60 × 90/16. Бумага типографская. Печ. л. 14.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, д. 11А, стр. 11.

10-значный ISBN, применяемый до 2007 г.:
ISBN 5-484-00657-0

Соответствующий 13-значный ISBN, вводимый с 2007 г.:
ISBN 978-5-484-00657-1

© КомКнига, 2006



422406 ID 39574

9 785484 006571

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Нѣкоторые типы комплексныхъ чиселъ тѣсно связаны съ геометрическими построеніями, играющими важную роль въ механикѣ. Къ такого рода типамъ принадлежать комплексныя числа, введенныя впервые въ науку англійскимъ математикомъ Cliffordомъ,—числа, основная операциі надъ которыми соотвѣтствуютъ основнымъ построеніямъ теоріи винтовъ Ball'я. Наша задача—развить вполнѣ, чѣмъ это было сдѣлано до сихъ поръ, связь, существующую между числами Clifford'a съ одной стороны и теоріей Ball'я—съ другой, и воспользоваться ей для доказательства нѣкоторыхъ теоремъ геометріи и механики.

Теорія винтовъ, подготовленная работами Poinsot, Chasles'я, M obius'a, Plucker'a и др. (историческій очеркъ ея развиція см. И. Занчевскій „Теорія винтовъ“, Зап. Мат. Отд. Нов. Общ. Ест., IX) и возведенная на степень стройнаго ученія Ball'емъ, обвязана своимъ успѣхомъ, главнымъ образомъ, введению въ механику твердаго тѣла понятія о винтѣ. Методъ, которымъ пользуется Ball въ своей теоріи (систематическое изложеніе работъ Ball'я см. H. Gravelius „Theoretische Mechanik starrer Systeme“) основывается на слѣдующихъ 4-хъ построеніяхъ.

1. Сложеніе динамъ (винтовъ).
2. Построеніе относительного момента двухъ динамъ—величины пропорціональной работе, которую производить система силъ, характеризуемая одной изъ динамъ при безконечно маломъ перемѣщеніи, опредѣляемомъ другой динамой.
3. Увеличеніе параметра динамы на постоянную величину.
4. Умноженіе интенсивности (главнаго вектора) динамы на постоянную величину.

Важная роль первыхъ двухъ построеній обусловливается уже тѣмъ, что они служатъ для рѣшенія двухъ основныхъ вопросовъ кинематики и динамики твердаго тѣла. Помимо

этого они обладаютъ, однако, нѣкоторыми замѣчательными свойствами, которыхъ однихъ уже было бы достаточно для того, чтобы можно было напередъ предвидѣть ихъ важное значеніе для всей теоріи винтовъ. Дѣйствительно, первая операція коммутативна и ассоціативна, т. е., если мы назовемъ слагаемыя динамы черезъ α , β , γ , то $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ и $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

Что касается второй, то, означивъ черезъ $[\alpha, \beta]$ относительный моментъ динамъ α и β , мы будемъ имѣть:

$$[\alpha, \beta] = [\beta, \alpha], \quad [(\alpha + \beta), \gamma] = [\alpha, \gamma] + [\beta, \gamma] \text{ и} \\ [\alpha, (\beta + \gamma)] = [\alpha, \beta] + [\alpha, \gamma],$$

откуда видимъ, что относительный моментъ обладаетъ свойствомъ произведенія и операція его построенія—свойствомъ операціи умноженія: она коммутативна и по отношению къ операціи сложенія дистрибутивна.

Подобнымъ же образомъ, если a есть нѣкоторая величина, и символомъ $[\alpha, a]$ мы означимъ динаму, параметръ которой болѣе параметра α на величину a , то одну изъ теоремъ Ball'я (Transactions of the Royal Irish Academy, XXV, § 82) мы можемъ выразить равенствомъ $[(\alpha + \beta), a] = [\alpha, a] + [\beta, a]$, изъ которого слѣдуетъ, что операція увеличенія параметра динамы на нѣкоторую величину носить характеръ умноженія динамы на постоянную. Такой же характеръ имѣеть, наконецъ, и четвертая операція.

Т. о. сущность всего метода Ball'я составляютъ четыре операціи, изъ которыхъ одна аналoична сложенію, а три остальныхъ умноженію динамъ: одну на другую, или динамы на число. Однако Ball, на сколько намъ известно, никогда не указываетъ аналогіи построеній 2-го и 3-го съ операціей умноженія и никогда не задается вопросомъ о разысканіи общаго вида операцій такого характера.

Дальнѣйшій шагъ въ вопросѣ объ основныхъ операціяхъ надъ динамами (винтами) дѣлаетъ Clifford въ небольшомъ, но весьма богатомъ новыми идеями мемуарѣ „Preliminary Sketch of Bi-quaternions“ (1873). Первые два параграфа этого мемуара Clifford посвящаетъ операціи дѣленія двухъ моторовъ, при чёмъ моторомъ онъ называетъ совокупность геометрическихъ величинъ, помощью которыхъ мы можемъ характеризовать

систему силь, приложенныхъ къ твердому тѣлу, т. е. ту совокупность, которую Ball называетъ динамой, заимствуя этотъ терминъ у Plucker'а¹⁾). Clifford показываетъ, что подобно тому, какъ частное отъ дѣленія двухъ векторовъ выражается кватерніономъ, такъ *изученіе операций дѣленія двухъ моторовъ приводитъ насъ къ комплексному выраженню* $q + \omega r$, где q и r суть кватерніоны, а символъ ω обладаетъ свойствомъ $\omega^2 = 0$, выраженню, которое онъ и называетъ бикватерніономъ.

Формулировавъ этотъ результатъ, Clifford оставляетъ его безъ дальнѣйшаго развитія и въ слѣдующихъ 3-хъ параграфахъ переходитъ къ эллиптическому пространству. Въ сжатомъ очеркѣ, нѣсколькими основными построеніями и теоремами, замѣчательными по своему изяществу и симметріи, онъ кладетъ основаніе геометріи и механикѣ твердаго тѣла (теоріи винтовъ) для эллиптическаго пространства. Онъ показываетъ между прочимъ, что *частное отъ дѣленія двухъ моторовъ для этого пространства выражается бикватерніономъ* $q + \omega r$, где ω есть символъ, обладающій свойствомъ $\omega^2 = 1$.

Къ вопросамъ, затронутымъ въ этомъ мемуарѣ, Clifford возвращается снова и посвящаетъ имъ еще пять небольшихъ замѣтокъ „Motion of a Solid in Elliptic Space“, „Further Note on Biquaternions“, „Notes on Biquaternions“, „On the Theory of Screws in a space of Constant Positive Curvature“, „Notes“, (Papers p. 642). Всѣ онъ относятся къ геометріи и механикѣ эллиптическаго пространства. Вторая, четвертая и пятая служить поясненіемъ къ его первому мемуару, въ первой выводятся диф. ур. движенія твердаго тѣла, и наконецъ въ третьей решаются задачи: построить ось мотора и сложить два мотора съ различными параметрами и, пересѣкающимися подъ прямымъ угломъ, осами. Т. о. Clifford сосредоточиваетъ все свое вниманіе на развитіи второй части „Preliminary Sketch“—механики и геометріи эллиптическаго пространства и совершенно оставляетъ въ сторонѣ развитіе первой части и вопроса объ основныхъ операцияхъ надъ винтами параболического или эллиптическаго пространствъ.

¹⁾ Въ чисто геометрическомъ изложеніи теоріи винтовъ намъ кажется удобнѣе вместо терминовъ «динам» или «моторъ» употреблять терминъ «бивекторъ», введенный Hamilton'омъ.

Къ неевклидовымъ же пространствамъ относятся и работы другихъ двухъ математиковъ, занимавшихся теоріей бикватерніоновъ: H. Cox'a и A. Buchheim'a. Т. к. въ нашу задачу не входитъ разсмотрѣніе теоріи винтовъ для неевклидовыхъ пространствъ, то мы и упомянемъ объ этихъ работахъ лишь постольку по сколько авторы касаются въ нихъ теоріи бикватерніоновъ. H. Cox (*Transactions of the Cambridge Phil. S.* XIII, 1883, „On the Application of Quaternions and Grassmann's Ausdehnungslehre to different kinds of Uniform Space“), пользуясь методомъ Grassmann'a, дополняетъ изслѣдованія Clifford'a, распространяя ихъ на пространство Лобачевскаго, и показываетъ, что частное отъ дѣленія двухъ моторовъ для этого пространства должно выражаться бикватерніономъ $q + \omega r$, где $\omega^2 = -1$, т. е. такимъ бикватерніономъ, который съ чисто аналитической стороны безъ всякаго отношенія его къ геометріи Лобачевскаго рассматривалъ уже Hamilton (*Elements of Quaternions*, p. 218, 219). Изъ изслѣдованій H. Cox'a и Clifford'a обнаруживается т. о. замѣчательная связь между тремя типами пространствъ съ постоянной кривизной и тремя типами бикватерніоновъ $q + \omega r$. Для эллиптическаго пространства $\omega^2 = 1$, для параболического $\omega^2 = 0$ и для гиперболического $\omega^2 = -1$, соответственно чему и бикватерніоны этихъ типовъ мы назовемъ эллиптическимъ, параболическимъ и гиперболическимъ.

A. Buchheim въ мемуарѣ „A memoir on Bi-quaternions“ (*Am. Journal*, VII, 1885) задается цѣлью развить теорію бикватерніоновъ всѣхъ трехъ типовъ. Въ первой части онъ занимается аналитической теоріей бикватерніоновъ и даетъ рядъ формулъ, которые одинаково приложимы ко всѣмъ тремъ типамъ. Онъ вводитъ нѣсколько новыхъ символовъ и понятій, связанныхъ съ понятіемъ о бикватерніонѣ; одному изъ нихъ—символу e онъ придаетъ особо важное значение: „этотъ символъ опредѣляется ур. $\omega^2 = e^2$, въ эллиптическомъ пространствѣ $e = 1$, въ параболическомъ $e = 0$, и въ гиперболическомъ $e = \sqrt{-1}$; эта величина въ дѣйствительности обратна радиусу кривизны пространствъ: она равняется величинѣ $1/k$, которая встрѣчается въ формулахъ Лобачевскаго; только благодаря введенію этой скалярной величины формулы становятся приложимыми къ пространствамъ всѣхъ трехъ

типовъ". Во второй части онъ переходитъ къ геометрическимъ приложениямъ бикватерніоновъ. Онъ даетъ сначала нѣсколько формулъ метрической геометріи для неевклидовыхъ пространствъ, рѣшаеть нѣсколько основныхъ задачъ (черезъ двѣ точки провести прямую линію, найти линію пересѣченія двухъ плоскостей, условіе пересѣченія двухъ линій и пр.), причемъ, пользуясь однородными координатами, бикватерніономъ $q + \omega q'$ онъ представляетъ точку, если $Vq = Sq' = 0$.— плоскость, если $Sq = Vq' = 0$ и винтъ (прямую), если $Sq = Sq' = 0$, затѣмъ выводить ур. цилиндра, и наконецъ переходитъ къ развитию теоріи параллельныхъ Clifford'a.

Въ четырехъ замѣткахъ „Theory of Screws in Elliptic Space“ (Proceedings of the London Math. Society. Vol. XV, XVI, XVII, XVIII; 1884, 85, 86 и 87) A. Buchheim доказываетъ теоремы Clifford'a и изучаетъ безконечно малыя и конечныя перемѣщенія твердаго тѣла для неевклидовыхъ пространствъ, пользуясь отчасти методомъ Grassmann'a, отчасти бикватерніонами.

Наконецъ намъ остается еще упомянуть о мемуарѣ Study „Von Bewegungen und Umlegungen“ (M. A., XXXIX Band., 1891), въ которомъ авторъ указываетъ на связь параболического бикватерніона съ группой движений евклидова пространства и пользуется этой связью для изученія конечныхъ перемѣщеній и отраженій точекъ, прямыхъ и плоскостей.

Изъ приведенного краткаго исторического обзора явствуетъ, что литература по теоріи бикватерніоновъ и вопросу объ основныхъ операціяхъ надъ винтами ю велика и что теорія бикватерніоновъ въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ требуетъ дальнѣйшей разработки и улучшений.

Дѣйствительно, въ теоріи бикватерніоновъ нужно различать двѣ стороны: одну—аналитическую, другую—геометрическую. Что касается послѣдней, то, слѣдя примѣру Ball'я, который, создавая теорію винтовъ, представляющую первый шагъ въ обобщеніи теоріи векторовъ, постоянно имѣть передъ собой прекрасный мемуаръ Poinsot (Theorie nouvelle...), мы должны при развитіи теоріи бикватерніоновъ—обобщенія теоріи квартеніоновъ—имѣть въ виду классическая работы Hamilton'a. Но на первомъ планѣ своей теоріи Hamilton ставить понятіе о векторѣ, основная операція надъ векторами и основательное изученіе ихъ геометрическихъ свойствъ. Совершенно

также, въ основаніе всей теоріи бикватерніоновъ должно быть положено детальное изученіе основныхъ операций: сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія бивекторовъ и ихъ геометрическихъ свойствъ. Между тѣмъ, въ выше упомянутыхъ работахъ, исключая мемуара „Preliminary Sketch“, замѣтокъ, служащихъ къ его поясненію, и работы Н. Сох‘а эти вопросы совершенно игнорируются.

Точно также и аналитическая сторона требуетъ по нашему мнѣнію дальнѣйшей обработки. Въ этомъ отношеніи введеніе въ теорію бикватерніоновъ понятія о функціяхъ комплексныхъ чиселъ вида $a + \omega b$, где $\omega^2 = 1$, или 0, или -1, должно существенно упростить аналитическую теорію, сведя въ некоторые отдѣлы ея на теорію кватерніоновъ съ одной стороны и теорію функцій отъ комплексныхъ чиселъ упомянутыхъ типовъ—съ другой.

Сдѣлать указанныя дополненія въ теоріи параболического бикватерніона, тѣснѣе связавъ ее съ теоріей винтовъ Ball‘я и составлять главную задачу первой части этой работы. Къ понятію о параболическомъ бикватерніонѣ мы были приведены независимо отъ выше указанныхъ работъ Clifford‘а, Buchheim‘а, Cox‘а и Study, причемъ для насъ исходной точной служилъ анализъ операции умноженія, а не операция дѣленія, какъ для Clifford‘а. Обобщая умноженіе векторовъ на случай бивекторовъ, мы руководимся принципомъ Hankel‘я: устойчивости формальныхъ законовъ операций (Princip der Permanenz formaler Gesetze, Hankel „Theorie der Complexen Zahlensysteme“) и приходимъ къ заключенію, что произведеніе двухъ бивекторовъ выражается бикватерніономъ.

Анализъ операций умноженія и составляетъ содержаніе первой главы. Изъ нея мы видимъ между прочимъ, что операций умноженія, подчиняющихся известнымъ условіямъ, существуетъ бесчисленное множество, но результаты ихъ легко получаются изъ тѣхъ результатовъ, которые выражаются бикватерніономъ.

Во второй главѣ мы развиваемъ аналитическую теорію параболического бикватерніона, рассматривая его какъ кватерніонъ, у которого коэффиціентами служатъ комплексныя числа $a + \omega b, \omega^2 = 0$. Весьма существеннымъ для теоріи параболического бикватерніона намъ кажется введеніе понятія о функціи комплексныхъ чиселъ этого вида. Только благодаря

ему мы имѣемъ возможность представить формулы теоріи биватерніоновъ съ желаемой простотой и изяществомъ въ видѣ тожественномъ съ формулами теоріи кватерніоновъ и т. о. формулировать общее положеніе: всѣ безъ исключенія формулы теоріи кватерніоновъ могутъ быть разсматриваемы какъ формулы теоріи бикватерніоновъ.

Третья глава посвящена болѣе подробному изученію геом. свойствъ операций умноженія и дѣленія бивекторовъ и бикватерніоновъ. Параграфы, въ которыхъ идетъ рѣчь о дѣленіи бивекторовъ представляютъ развитіе первыхъ двухъ §§ „Preliminary Sketch“ въ духѣ „Elements of Quaternions“ Hamilton'a.

Изъ тожества формулъ теоріи кватерніоновъ съ формулами теоріи бикватерніоновъ и возможности интерпретировать эти послѣднія какъ формулы винтоваго счислениія вытекаетъ весьма общая теорема, формулированная нами въ началѣ первой главы второй части; изъ нея между прочимъ слѣдуетъ, что когда мы будемъ въ формулахъ геометріи или механики эвклидова пространства, элементомъ котораго служить точка, считать всѣ числа комплексными вида $a + \omega b (\omega^2 = 0)$, то всѣ эти формулы могутъ быть интерпретированы какъ формулы геометріи или механики пространства шести измѣреній, элементомъ котораго служить бивекторъ. Развитіе этого положенія и составляетъ первую главу второй части.

Во второй главѣ мы переходимъ къ приложению винтоваго счислениія къ изученію группъ винтовъ (въ смыслѣ Ball'я) и показываемъ связь бикватерніоновъ съ группой (въ смыслѣ S. Lie) эвклидовыхъ движений.

Наконецъ въ третьей главѣ мы излагаемъ свойства винтовыхъ интеграловъ ур. механики и изслѣдуемъ отношеніе ихъ къ подгруппамъ движений эвклидова пространства.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

Глава I.

1. Движение твердаго тѣла въ теченіи безконечно малаго промежутка времени есть винтовое движение, такъ что мы можемъ воспроизвести его, если свяжемъ тѣло неизмѣняемо съ гайкой нѣкотораго винта и сообщимъ этой послѣдней опредѣленную угловую скорость. Характеръ движенія гайки по винту не зависитъ ни отъ радиуса того цилиндра, на которомъ расположены нарѣзки винта, ни отъ формы этихъ послѣднихъ, ни отъ положенія гайки на винтѣ, а только отъ отношенія между одновременными поступательнымъ и вращающимъ перемѣщеніями гайки, отношенія, которое называется параметромъ винта и связано съ шагомъ винта ур.: шагъ = $2\pi \times$ параметръ. Для нась, слѣдовательно, винтъ вполнѣ характеризуется его параметромъ. Положеніе винта мы можемъ опредѣлить положеніемъ его оси, а угловую скорость движенія гайки—задать векторомъ R , равнымъ угловой скорости, лежащимъ на оси винта и направленнымъ такъ, что для глаза, помѣщенного въ концѣ вектора и смотрящаго на его начало, вращеніе гайки кажется происходящимъ по часовой стрѣлкѣ. Итакъ движение твердаго тѣла во всякий моментъ опредѣляется нѣкоторымъ винтомъ σ (его осью и параметромъ $P\sigma$) и векторомъ R , лежащимъ на оси винта.

Съ другой стороны движение твердаго тѣла вполнѣ опредѣляется угловой скоростью Ω вращенія тѣла вокругъ какой нибудь точки O и скоростью V этой точки. Мы имѣемъ, слѣдовательно, два способа опредѣлить движение твердаго тѣла во всякий моментъ и понятно, что возможенъ переходъ отъ одного способа къ другому, такъ что по данной точкѣ O и векторамъ Ω и V , мы можемъ построить винтъ и векторъ R , и наоборотъ.

Если векторы Ω и V заданы проекциями ихъ на прямогольные оси x , y , z , имѣющія начало въ точкѣ O : векторъ Ω —проекціями p , q , r , векторъ V —проекціями— a , b , c , то винтъ σ строится т. о.: его параметръ $P\sigma$, равняется:

$$P\sigma = \frac{pa + qb + rc}{\Omega^4}, \quad (1)$$

его ось проходить черезъ точку, координаты которой суть

$$x_0 = \frac{qc - rb}{\Omega^4}, \quad y_0 = \frac{ra - pc}{\Omega^4}, \quad z_0 = \frac{pb - qa}{\Omega^4}, \quad \text{гдѣ } \Omega^4 = p^2 + q^2 + r^2 \quad (2)$$

и параллельна вектору Ω . Что же касается вектора R , то онъ равенъ и параллеленъ вектору Ω .

Величины p, q, r, a, b, c опредѣляютъ винтъ σ ; мы будемъ называть ихъ Plücker'овыми координатами. Но нетрудно видѣть, что для построения винта мы должны знать 5 величинъ: 4 величины, чтобы опредѣлить положеніе прямой—его оси, и пятую—его параметръ, а потому между 6 Plücker'овыми координатами одна должна быть лишней. И дѣйствительно, изъ предыдущихъ формулъ ясно видно, что винтъ σ зависитъ не отъ величинъ p, q, r, a, b, c , а только отъ ихъ отношеній, такъ что Plücker'овы координаты суть однородныя координаты винта.

Когда намъ данъ винтъ σ и векторъ R , лежащій на его оси, то векторы Ω и V для точки O опредѣляются т. о.: векторъ Ω равенъ и параллеленъ вектору R , векторъ же V есть скорость, которую будетъ имѣть точка O , если мы свяжемъ ее съ гайкой винта σ и сообщимъ этой послѣдней угловую скорость R .

Совокупность векторовъ Ω и V мы будемъ наз. бивекторомъ. Векторъ Ω его главнымъ векторомъ или главною частью, векторъ V —его моментомъ, точку O —его точкой приведенія, и наконецъ величины p, q, r, a, b, c его Plücker'овыми координатами. Ось и параметръ винта σ , опредѣляемаго бивекторомъ, мы назовемъ осью и параметромъ бивектора (Ω, V) . Про бивекторъ (Ω, V) мы будемъ говорить, что онъ лежитъ на винтѣ σ или дѣйствуетъ по винту σ .

2. Формулы преобразования координат бивектора (винта). Проведемъ черезъ точку O новую систему координатъ (x', y', z') и означимъ черезъ p', q', r', a', b', c' проекціи векторовъ Ω и V на новыя оси. Если положеніе новой системы координатъ относительно старой опредѣляется схемой

	x	y	z
x'	λ_1	μ_1	v_1
y'	λ_2	μ_2	v_2
z'	λ_3	μ_3	v_3

то между p', q', r', a', b', c' и p, q, r, a, b, c будуть существовать соотношенія

$$\begin{aligned} p' &= p\lambda_1 + q\mu_1 + rv_1 & a' &= a\lambda_1 + b\mu_1 + cv_1 \\ q' &= p\lambda_2 + q\mu_2 + rv_2 & b' &= a\lambda_2 + b\mu_2 + cv_2 \\ r' &= p\lambda_3 + q\mu_3 + rv_3 & c' &= a\lambda_3 + b\mu_3 + cv_3 \end{aligned} \quad (3)$$

Очевидно, что величины p', q', r', a', b', c' суть координаты бивектора (Ω, V) (винта σ) относительно новой системы координатъ, и предыдущія формулы мы можемъ разматривать какъ формулы преобразованія координатъ бивектора (Ω, V) (винта σ), когда начало координатъ остается прежнімъ и измѣняется только направление осей.

Если новая система координатъ будетъ безконечно близка къ старой, то новыя координаты будутъ безконечно мало отличаться отъ старыхъ, и помошью извѣстныхъ формулъ кинематики мы найдемъ, что безконечно малыя приращенія координатъ $\delta p, \delta q, \delta r, \delta a, \delta b, \delta c$ будутъ:

$$\begin{aligned} \delta p &= q\delta c - r\delta b & \delta a &= b\delta c - c\delta b \\ \delta q &= r\delta a - p\delta c & \delta b &= c\delta a - a\delta c \\ \delta r &= p\delta b - q\delta a & \delta c &= a\delta b - b\delta a \end{aligned}$$

гдѣ $\delta a, \delta b, \delta c$, суть составляющія по осамъ координатъ безконечно малаго вращенія, переводящаго старую систему координатъ въ новое положеніе.

Зная p, q, r, a, b, c мы можемъ найти скорость V' какойнибудь точки O' тѣла и угловую скорость вращенія тѣла— Ω' вокругъ точки O' . Означивъ черезъ p', q', r', a', b', c' соответственно проекціи Ω' и V' на оси координатъ $O(x, y, z)$, черезъ l, m, n координаты точки O' относительно той же системы координатъ, мы имѣемъ слѣд. формулы кинематики:

$$\begin{aligned} p' &= p \quad a' = a + qn - rm \\ q' &= q \quad b' = b + rl - pn \\ r' &= r \quad c' = c + pm - ql \end{aligned} \tag{4}$$

Замѣтимъ, что величины p', q', r', a', b', c' мы можемъ разматривать какъ проекціи Ω' и V' на оси (x', y', z') , имѣющія начало въ O' и соответственно параллельныя осамъ x, y, z и, слѣд., считать эти величины координатами бивектора (Ω', V') .

Бивекторомъ (Ω', V') мы также хорошо можемъ опредѣлить движение тѣла, какъ и бивекторомъ (Ω, V) , и т. к. оба они относятся къ одному и тому же движению, то винтъ σ' , который мы можемъ построить помошью бивектора (Ω', V') также, какъ раньше мы строили винтъ σ помошью бивектора (Ω, V) , долженъ быть тожественъ съ этимъ послѣднимъ: оси σ и σ' должны совпадать и параметры ихъ должны быть одинаковы. Т. о. p, q, r, a, b, c и p', q', r', a', b', c' будутъ Plücker'овыми координатами одного и тогоже винта σ . Первая система опредѣляетъ винтъ относительно осей $O(x, y, z)$, а вторая—относительно осей $O'(x', y', z')$ и формулы (4) представляютъ формулы преобразованія однородныхъ координатъ винта σ , когда мы, не измѣнная направлениія осей, перемѣщаемъ начало координатъ (точку приведенія). Сравнивая бивекторъ (Ω', V') съ (Ω, V) , мы видимъ, что векторъ Ω' равенъ и параллеленъ вектору Ω . Кромѣ того, т. к. ось и параметръ σ' служить осью и параметромъ бивектора (Ω', V') , то изъ предыдущаго мы заключаемъ: главные векторы бивекторовъ (Ω', V') и (Ω, V) равны и параллельны, оси ихъ совпадаютъ и параметры ихъ одинаковы. Вслѣдствіе этого свойства бивекторовъ (Ω, V) и (Ω', V') мы можемъ считать ихъ тожественными, мы можемъ считать ихъ однимъ и тѣмъ же бивекторомъ. Назовемъ его α ; въ первомъ случаѣ точкой приведенія α служить точка O и бивекторъ характеризуется двумя векторами Ω и V , во втор-

ромъ—точкой приведенія служить O' и α характеризуется двумя векторами $\Omega' = \Omega$ и V' . Координаты бивектора α относительно осей $O(x,y,z)$ суть p,q,r,a,b,c ; координаты того же бивектора относительно осей $O'(x',y',z')$, суть p',q',r',a',b',c' , и формулы (4) мы можемъ разматривать какъ формулы преобразованія координатъ бивектора, когда мы перемѣщаемъ начало координатъ (точку приведенія), не измѣняя направлениія осей. Винтъ, опредѣляемый бивекторомъ α , который до сихъ поръ мы означали буквой b , будемъ означать теперь тою же буквой a .

При безконечно маломъ перемѣщеніи начала $(\delta l, \delta m, \delta n)$, мы изъ формулы (4) получаемъ для безконечно малыхъ приращеній координатъ выраженія:

$$\begin{aligned}\delta p &= 0 & \delta a &= q\delta n - r\delta m \\ \delta q &= 0 & \delta b &= r\delta l - p\delta n \\ \delta r &= 0 & \delta c &= p\delta m - q\delta l\end{aligned}$$

Формулы для общаго случая преобразованія, когда измѣняется какъ начало координатъ, такъ и направлениія осей, найдутся помошью (3) и (4). Если новая система осей безконечно близка къ старой, то безконечно малыя приращенія координатъ мы найдемъ, складывая приращенія, получаемыя ими при перемѣщеніи начала съ приращеніями—при поворотѣ осей:

$$\begin{aligned}\delta p &= q\delta c - r\delta b & \delta a &= b\delta c - c\delta b - r\delta m + q\delta n \\ \delta q &= r\delta a - p\delta c & \delta b &= c\delta a - a\delta c - p\delta n + r\delta l \\ \delta r &= p\delta b - q\delta a & \delta c &= a\delta b - b\delta a - q\delta l + p\delta m\end{aligned}\quad (5)$$

Резюмируя теперь все вышесказанное, мы приходимъ къ такому результату: каждый бивекторъ опредѣляетъ нѣкоторый винтъ и векторъ лежащий на оси винта. Обратно, винтъ и векторъ, лежащий на его оси опредѣляетъ нѣкоторый бивекторъ. Формулы (3), (4) и (5) представляютъ формулы преобразованія координатъ бивектора (винта), первыя—при измѣненіи направлениія осей, вторыя—при перемѣнѣ точки приведенія и третыи—въ общемъ случаѣ безконечно малаго перемѣщенія системы координатъ.

Т. к. p,q,r,a,b,c суть однородныя координаты винта α , то понятно, что по данному винту α опредѣляется только отно-

шения между p, q, r, a, b, c и, слѣд., каждому винту α отвѣтаетъ ∞^1 бивекторовъ α , лежащихъ на винтѣ α . Если же мы поставимъ условиемъ, чтобы $\Omega^3=1$, то данному винту α будетъ отвѣтать определенный бивекторъ и въ этомъ смыслѣ бивекторъ (Ω, V) , причемъ длина $\Omega=1$, можетъ быть названъ также винтомъ α .

3. Частные случаи. Если мы возьмемъ точку O' на оси бивектора (напр. возьмемъ за точку O' точку (x_0, y_0, z_0)), то видъ бивектора значительно упростится: оба вектора Ω и V' будутъ лежать на оси бивектора и отношение $V':\Omega=\pm Pa$, смотря по тому, будутъ ли векторы V' и Ω имѣть одинаковое или прямо противоположное направление. Если, при постоянномъ V' , Ω будетъ уменьшаться, то Pa будетъ рости и, при $\Omega=0$ сдѣлается $-\infty$. Тогда для всѣхъ точекъ приведенія $\Omega=0$ и V' остается однимъ и тѣмъ же векторомъ: тѣло будетъ имѣть поступательное движение и для оси бивектора будетъ определено только направление—совпадающее съ направлениемъ вектора V , положеніе же оси будетъ неопределено.

Итакъ, когда $p=q=r=0$, величины же a, b, c не всѣ равны нулю, то параметръ бивектора $=\infty$, положеніе его оси неопределено, а направление ея опредѣляется векторомъ V . Винтъ бесконечно большаго параметра опредѣляется вполнѣ направлениемъ.

Когда $ra+qb+rc=0$, причемъ не всѣ величины p, q, r равны нулю, то параметръ винта α равенъ 0 и движение тѣла есть вращательное движение вокругъ оси α . Если мы возьмемъ точку приведенія на оси, то $V'=0$ и бивекторъ будетъ характеризоваться векторомъ Ω , лежащимъ на оси; винтъ же параметра нуль вполнѣ опредѣляется его осью или векторомъ $\Omega=1$, лежащимъ на оси.

4. До сихъ поръ бивектору (Ω, V) мы придавали кинематический смыслъ. Но Poinsot показалъ, что подобно тому, какъ движение твердаго тѣла характеризуется бивекторомъ Ω, V и точкой приведенія O , такъ всякая система силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу эквивалентна одной силѣ R , приложенной къ какой нибудь точкѣ O тѣла и парѣ силъ, опредѣляемой ея линейнымъ моментомъ G , и слѣд., характеризуется также бивекторомъ (R, G) и точкой приведенія. Poinsot своими работами оказалъ величайшую услугу механикѣ, выяснивъ тожество геометрическихъ построений, которыхъ мы

употребляемъ въ кинематикѣ при сложеніи и разложеніи угловыхъ и поступательныхъ скоростей съ подобными же построениями динамики при сложеніи и разложеніи силъ и паръ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу. Изъ его работы слѣдуетъ, что законъ по которому мѣняется бивекторъ R , G съ измѣненіемъ точки приведенія O , тождественъ съ закономъ измѣненія бивектора (Ω, V) (форм. 4), что бивекторъ (R, G) также можетъ служить для построенія нѣкотораго винта, какъ и бивекторъ (Ω, V) , что какъ тотъ, такъ и другой бивекторы принимаютъ простейшій видъ, если точка приведенія будетъ взята на оси винта, словомъ, что геометрическія свойства бивекторовъ (Ω, V) и (R, G) тождественны. Итакъ, съ геометрической точки зреінія безразлично, опредѣляетъ ли данный бивекторъ движение твердаго тѣла или характеризуетъ систему силъ, къ нему приложенныхъ.

5. Сложеніе и вычитаніе бивекторовъ (винтовъ). Пусть мы имѣемъ два бивектора $\alpha(p, b, r, a, b, c)$ и $\beta(p, q, r, a, b, c)$. Суммой бивекторовъ α и β называютъ бивекторъ γ , координаты которого суть $(p+p_1, +_1q, r+r_1, a+a_1, b+b_1, q, c+c_1)$. Бивекторъ γ наз. также сложнымъ бивекторомъ, бивекторы же α и β —слагающими. Зависимость между α , β и γ выражается равенствомъ $\gamma = \alpha + \beta$. Винтъ, опредѣляемый бивекторомъ γ наз. суммой винтовъ α и β , а эти послѣдніе слагающими винтами. Операдія сложенія бивекторовъ хорошо изслѣдована. Не входя въ подробности, мы замѣтимъ только, что сложеніе бивекторовъ можетъ быть сведено къ построенію цилиндроида—поверхности, представляющей собой алгебраическій коноидъ третьаго порядка, что эта операдія коммутативна и ассоциативна и что бивекторъ $\gamma = \alpha + \beta$ остается однимъ и тѣмъ же бивекторомъ, къ какой бы координатной системѣ ни были отнесены бивекторы α и β .

Вычитаніе бивекторовъ опредѣляется какъ операдія обратная сложенію.

6. Умноженіе. Подъ операдіей умноженія бивекторовъ мы будемъ подразумѣвать операдію, обладающую слѣд. свойствами:

А. Она должна быть двояко дистрибутивной („distributiv in seinen beiden Theilen“, Hankel, I. c., p. 31) по отношенію къ операдіи сложенія, т. е., если мы означимъ черезъ α , β , γ три бивектора, символомъ $\varphi(\alpha, \beta)$ произведеніе бивектора β на α ,

то

$$\varphi(\alpha, \beta + \gamma) = \varphi(\alpha, \beta) + \varphi(\alpha, \gamma)$$

$$\varphi(\alpha + \gamma, \beta) = \varphi(\alpha, \beta) + \varphi(\gamma, \beta)$$

В. Она не должна зависеть отъ выбора системы координатъ, къ которой мы относимъ данные бивекторы (винты), т. е. при однихъ и тѣхъ же множителяхъ результатъ умноженія долженъ быть одинъ и тотъ же, какова бы ни была координатная система осей.

Мы пояснимъ ниже точнѣе смыслъ этихъ требованій на каждомъ изъ тѣхъ случаевъ, которые намъ придется разсматривать. Какъ въ теоріи кватерніоновъ разсматриваются трехъ типовъ произведеніе векторовъ: скалярное произведеніе, равное взятому со знакомъ—такъ наз. геометрическому произведенію двухъ векторовъ, векторное произведеніе и, наконецъ, произведеніе третьаго типа, которое наз. просто произведеніемъ и выражается квартерніономъ, такъ и мы будемъ различать три типа операций умноженія бивекторовъ, аналогичныхъ указаннымъ типамъ умноженія векторовъ.

7. *Скалярное произведеніе.* Пусть мы имѣемъ два бивектора $\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ и $\beta(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$. Скалярнымъ произведеніемъ бивектора β на бивекторъ α —будемъ означать его знакомъ $S\alpha\beta$ —мы назовемъ функцию координатъ бивекторовъ α и β : $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_6; y_1, y_2, \dots, y_6) = \varphi(x, y)$, обладающую свойствами *A* и *B*. Разсмотримъ отдельно эти свойства.

Свойство *A*. Если $y(y'_1 y'_2 y'_3 y'_4 y'_5 y'_6)$ есть какой нибудь бивекторъ, то свойство *A* выразится равенствами:

$$S\alpha(\beta + y) = S\alpha\beta + S\alpha y$$

$$S(\alpha + y)\beta = S\alpha\beta + S\alpha y$$

Замѣчая, что координаты бивектора $\beta + y$ суть $y_1 + y'_1, \dots, y_6 + y'_6$, и что

$$S\alpha(\beta + y) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_6; y_1 + y'_1, y_2 + y'_2, \dots, y_6 + y'_6),$$

$$S\alpha y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_6; y'_1, y'_2, \dots, y'_6),$$

мы можемъ представить первое равенство такъ:

$$\begin{aligned} &\varphi(x_1, \dots, x_6; y'_1 + y_1, \dots, y_6 + y'_6) = \\ &= \varphi(x_1, \dots, x_6; y_1, \dots, y_6) + \varphi(x_1, \dots, x_6; y'_1, \dots, y'_6), \end{aligned}$$

или короче:

$$\varphi(x, y + y') = \varphi(x, y) + \varphi(x, y').$$

Подобнымъ же образомъ второе равенство приметъ видъ:

$$\varphi(x + y', y) = \varphi(x, y) + \varphi(y', y).$$

Эти равенства должны имѣть мѣсто, каковы бы ни были x, y, y' . Дифференцируя первое по y_1 и полагая $y_1 = y_2 = y_3 = -y_4 = y_5 = y_6 = 0$, мы получаемъ равенство

$$\varphi'_{y_1}(x_1, \dots, x_6; y_1', \dots, y_6') = \varphi'_{y_1}(x_1, \dots, x_6; 0, \dots, 0)$$

справедливое при всякихъ y' , изъ котораго мы видимъ, что φ'_{y_1} не зависитъ отъ аргументовъ y_1, y_2, \dots, y_6 . Функция φ будетъ, слѣд., линейной функцией отъ y_1 : $\varphi = M_1 y_1 + L_1$, гдѣ M_1 зависитъ только отъ x , а L_1 , отъ x и y_2, y_3, \dots, y_6 . Также докажемъ, что и $\varphi'_{y_2} = \frac{\partial L_1}{\partial y_2}$ не зависитъ отъ y_1, y_2, \dots, y_6 , откуда, припоминая, что L_1 не содержитъ y_1 , найдемъ $L_1 = M_2 y_2 + L_2$, гдѣ M_2 есть функция только аргументовъ x , а L_2 отъ аргументовъ x и y_3, y_4, y_5, y_6 . Продолжая далѣе эти разсужденія, убѣдимся въ концѣ концовъ, что функция φ есть функция линейная относительно y_1, y_2, \dots, y_6 . Совершенно также, исходя изъ втораго равенства, мы найдемъ, что φ есть линейная функция также и отъ x_1, x_2, \dots, x_6 , и слѣд.,

$$\varphi = M + \sum_i l_i x_i + \sum_k m_k y_k + \sum_{i,k} s_{ik} x_i y_k,$$

гдѣ M, l_i, m_k, s_{ik} ($i, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) суть величины постоянныя. Если положимъ $y_1 = y_2 = \dots = y_6 = 0, y_1' = y_2' = \dots = y_6' = 0$ — въ равенствѣ первомъ и $x_1 = x_2 = \dots = x_6 = 0, y_1' = y_2' = \dots = y_6' = 0$ — въ равенствѣ второмъ, то они примутъ видъ:

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, \dots, x_6; 0, \dots, 0) &= 2\varphi(x_1, \dots, x_6; 0, \dots, 0) \\ \varphi(0, \dots, 0; y_1, \dots, y_6) &= 2\varphi(0, \dots, 0; y_1, \dots, y_6),\end{aligned}$$

откуда заключаемъ, что скалярное произведение обращается въ нуль, если одинъ изъ бивекторовъ исчезаетъ. Чтобы удовлетворить этому свойству функции φ , мы должны коэффициенты M, l_i, m_k положить равными нулю. Т. о. мы окончательно

находимъ, что φ должна быть билинейной однородной функцией отъ x и y :

$$\varphi = \sum s_{ik} x_i y_k.$$

8. Свойство B . Означая $x_1', x_2', x_3', x_4', x_5', x_6'; y_1', y_2', y_3', y_4', y_5', y_6'$ новые координаты тѣхъ же бивекторовъ α и β , отнесенныхъ къ новой системѣ координатъ, мы должны на основаніи условія B имѣть равенство $\varphi(x',y') = \varphi(x,y)$, которое должно сдѣлаться тождествомъ, какова бы ни была новая система координатъ, если мы выразимъ новые координаты x',y' 透过 старыя x и y . Предполагая, что новая система координатъ лежитъ безконечно близко къ старой, мы будемъ имѣть $x'_i = x_i + \delta x_i$, $y'_k = y_k + \delta y_k$ ($i,k = 1,2,3,4,5,6$), $\varphi(x',y') = \varphi(x,y) + \delta\varphi(x,y)$, и условіе B приметъ видъ $\varphi(x,y) + \delta\varphi(x,y) = \varphi(x,y)$, откуда $\delta\varphi(x,y) = 0$.

Развернемъ выраженіе $\delta\varphi(x,y)$. Безконечно малыя приращенія δx и δy , получаемыя координатами при безконечно маломъ перемѣщеніи системы осей опредѣляются формулами (5), которые при новыхъ обозначеніяхъ принимаютъ видъ

$$\begin{aligned}\delta x_1 &= x_2 \delta c - x_3 \delta b \\ \delta x_2 &= x_3 \delta a - x_1 \delta c \\ \delta x_3 &= x_1 \delta b - x_2 \delta a \quad : \\ \delta x_4 &= x_5 \delta c - x_6 \delta b + x_2 \delta n - x_1 \delta m \\ \delta x_5 &= x_6 \delta a - x_4 \delta c + x_3 \delta l - x_1 \delta n \\ \delta x_6 &= x_4 \delta b - x_5 \delta a + x_1 \delta m - x_2 \delta l\end{aligned}\tag{6}$$

Такими же формулами выражаются и приращенія δy . Подставивъ δx и δy въ $\delta\varphi = \sum \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \delta x_i + \sum \frac{\partial\varphi}{\partial y_k} \delta y_k$, мы будемъ имѣть

$$\delta\varphi = L\delta l + M\delta m + N\delta n + \mathfrak{A}\delta a + \mathfrak{B}\delta b + \mathfrak{C}\delta c,$$

гдѣ

$$L = \frac{\partial \varphi}{\partial x_6} x_3 - \frac{\partial \varphi}{\partial x_5} x_4 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_5} y_3 - \frac{\partial \varphi}{\partial y_6} y_2$$

$$\mathfrak{A} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} x_3 - \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} x_4 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} y_3 - \frac{\partial \varphi}{\partial y_4} y_4 +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial x_5} x_5 - \frac{\partial \varphi}{\partial x_6} x_6 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_5} y_5 - \frac{\partial \varphi}{\partial y_6} y_6$$

и M, N получаются изъ L , а $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ изъ \mathfrak{A} в круговой перестановкой буквъ $x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3; x_4, x_5, x_6; y_4, y_5, y_6$. Члены $L\delta l + M\delta m + N\delta n$ въ $\delta\varphi$ выражаютъ приращеніе, которое зависитъ только отъ перемѣщенія начала координатъ, а члены $\mathfrak{A}\delta a + \mathfrak{B}\delta b + \mathfrak{C}\delta c$ —отъ перемѣнны направлениа осей.

9. Т. к. $\delta l, \delta m, \delta n, \delta a, \delta b, \delta c$ совершенно произвольны и между собой независимы, то условіе $\delta\varphi = 0$ распадается на шесть

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0 \quad (a)$$

$$\mathfrak{A} = 0, \quad \mathfrak{B} = 0, \quad \mathfrak{C} = 0, \quad (b)$$

которыя должны быть удовлетворены каковы бы ни были x и y , такъ что коэффиціенты этихъ ур. при различныхъ x и y должны быть равны нулю. Первая система ур. представляетъ условія, чтобы функция φ не мѣнялась при перемѣщеніи начала координатъ, а вторая—при измѣненіи направлениа осей. Изъ первыхъ трехъ ур. мы находимъ, что

$$s_{14} = s_{46} = s_{36} = s_{41} = s_{52} = s_{63} = -k, \text{ скажемъ,}$$

и что всѣ остальные коэффиціенты, у которыхъ хотя одинъ изъ значковъ > 3 , равны нулю, такъ что

$$\varphi(x, y) = -k(x_1 y_4 + x_2 y_5 + x_3 y_6 + x_4 y_1 + x_5 y_2 + x_6 y_3) + \sum_1^3 s_{ik} x_i y_k$$

Для всякой функции, которая при измѣненіи направлениа осей координатъ не мѣняется, совокупность членовъ $\mathfrak{A}\delta a + \mathfrak{B}\delta b + \mathfrak{C}\delta c$ равняется нулю, и функция тождественно удовлетворяетъ ур. (b). Такую функцию представляетъ первая часть $\varphi(x, y)$:

$-k(x_4y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_1 + x_5y_2 + x_6y_3)$, ибо она равняется произведению $-k$ на сумму двух геометрических произведений: вектора (x_1, x_2, x_3) на вектор (y_4, y_5, y_6) и вектора (x_4, x_5, x_6) на вектор (y_1, y_2, y_3) ; эта функция удовлетворяет, след., ур. (b), а т. к. эти ур. линейны, то и вторая часть φ , взятая отдельно, должна удовлетворять тем же ур..

Подставивъ $\sum_{i=1}^3 s_{ik}x_iy_k$ въ ур. (b) и приравнявъ нулю коэффициенты при различныхъ x и y , мы найдемъ $s_{11} = s_{22} = s_{33} = -k_1$, $s_{12} = s_{21} = s_{23} = s_{32} = s_{31} = s_{13} = 0$ и т. о. для φ окончательно получимъ выражение:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) = & -k_1(x_1y_1 + x_2y_3 + x_3y_2) - \\ & -k(x_1y_4 + x_2y_5 + x_3y_6 + x_4y_1 + x_5y_2 + x_6y_3)\end{aligned}$$

10. Каковы бы ни были коэффициенты k и k_1 , функция φ не меняется не только при бесконечно малыхъ, но и при конечныхъ перемѣщеніяхъ системы координатъ; она будетъ, след., удовлетворять всѣмъ выше поставленнымъ условіямъ. Т. к. коэффициенты k и k_1 остаются неопределенными, то существуетъ бесчисленное множество функций, изъ которыхъ каждая можетъ быть названа, согласно нашему определенію, скалярнымъ произведеніемъ бивекторовъ α и β ; функция φ представляетъ ихъ общий видъ.

Не нарушая существенно общности вида функции φ , мы можемъ одному изъ коэффициентовъ k или k_1 дать некоторое вполнѣ определенное (отличное отъ нуля) значеніе; положимъ $k_1 = 1$. Считать $k_1 = 1$ заставляетъ насъ то соображеніе, что въ частномъ случаѣ, когда бивекторы обратятся въ векторы, имѣющіе общее начало, т. е. $x_4 = x_5 = x_6 = y_4 = y_5 = y_6 = 0$, скалярное произведение бивекторовъ должно обратиться въ скалярное произведение векторовъ (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) , т. е. въ $-(x_1y_1 + x_2y_3 + x_3y_2)$, и, след., $k_1 = 1$. Что же касается до коэффициента k , то мы оставимъ его неопределеннымъ; мы увидимъ далѣе, что подъ k мы должны будемъ подразумѣвать не количество, а некоторый символъ, смыслъ и свойство которого опредѣляются ниже.

Итакъ, употребляя болѣе обычное обозначеніе координатъ бивекторовъ α и β буквами p, q, r, a, b, c , скалярнымъ произве-

деніемъ двухъ бивекторовъ α на β мы будемъ называть выражение:

$$Sa\beta = -(pp_1 + qq_1 + rr_1) - k(pa_1 + qb_1 + rc_1 + p_1a + q_1b + r_1c) \quad (7)$$

гдѣ p, q, r, a, b, c суть координаты бивектора α , а $p_1, q_1, r_1, a_1, b_1, c_1$ — бивектора β .

11. *Векторное произведение.* Векторнымъ произведеніемъ бивектора β на бивекторъ α —будемъ означать его символомъ $V\alpha\beta$ —мы назовемъ бивекторъ, обладающій свойствами A и B . Координаты бивектора $V\alpha\beta$: $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ должны быть некоторыми функциями отъ координатъ бивекторовъ α и β :

$$z_i = \varphi_i(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6; y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Посмотримъ, что мы можемъ судить о видѣ этихъ функций на основаніи свойствъ A и B бивектора $V\alpha\beta$.

Свойство A . Свойство дистрибутивности векторнаго умноженія выражается равенствами:

$$V\alpha(\beta + \gamma) = V\alpha\beta + V\alpha\gamma$$

$$V(\alpha + \gamma)\beta = V\alpha\beta + V\gamma\beta$$

Понятно, что каждое изъ нихъ равносильно шести равенствамъ между координатами бивектора, стоящаго въ лѣвой части, и одноименными координатами бивектора правой части:

$$\begin{aligned} \varphi_i(x_1, \dots, x_6; y_1 + y'_1, \dots, y_6 + y'_6) = \\ \varphi_i(x_1, \dots, x_6; y_1, \dots, y_6) + \varphi_i(x_1, \dots, x_6; y'_1, \dots, y'_6) \end{aligned} \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

$$\begin{aligned} \varphi_i(x_1 + y'_1, \dots, x_6 + y'_6; y_1, \dots, y_6) = \\ \varphi_i(x_1, \dots, x_6; y_1, \dots, y_6) + \varphi_i(y'_1, \dots, y'_6; y_1, \dots, y_6). \end{aligned}$$

Изъ этихъ равенствъ мы видимъ, что каждая изъ функций φ_i должна тождественно удовлетворять тѣмъ двумъ равенствамъ, которымъ въ § 7 удовлетворяла функция φ . Отсюда прямо слѣдуетъ, что функции φ_i должны быть билинейными

однородными функциями координат x и y :

$$z_1 = \varphi_1(x, y) = \Sigma p_{ik} x_i y_k$$

$$z_4 = \varphi_4(x, y) = \Sigma a_{ik} x_i y_k$$

Выражений для другихъ функций мы не выписываемъ, ибо сейчасъ увидимъ, что они весьма просто получаются изъ φ_1 и φ_4 , на основаніи свойства B , къ анализу которого мы теперь и переходимъ.

12. Свойство B . Это свойство предъявляетъ къ φ_i слѣдующее требование: къ какимъ бы координатнымъ осямъ ни были отнесены бивекторы α и β , функции φ_i должны служить координатами одно и того же бивектора, отнесенного къ тѣмъ же осямъ, точнѣе говоря, если x' , y' суть координаты бивекторовъ α и β отнесенныхъ къ новымъ осямъ, то бивекторъ, координаты которого относительно новыхъ осей суть $z'_i = \varphi_i(x', y')$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) долженъ быть тожественъ съ бивекторомъ $V\alpha\beta$, старыми координатами которого служать функции $z_i = \varphi_i(x, y)$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) и, слѣд., между функциями $z'_i = \varphi_i(x', y')$ и $z_i = \varphi_i(x, y)$ должны существовать такія же соотношенія, какія существуютъ между координатами одного и того же бивектора, отнесенного къ различнымъ осямъ, соотношенія, которые выражаются формулами преобразованія координатъ. Эти соотношенія должны обратиться въ тождество, если мы x' , y' выразимъ черезъ x , y . Постараемся теперь опредѣлить функции φ_i такъ, чтобы онѣ удовлетворяли поставленнымъ условіямъ при слѣдующихъ преобразованіяхъ координатъ.

I. Измѣнимъ направление осей такъ, чтобы ось x' совпадала съ y , ось y' съ z , ось z' съ x . Припоминая геометрическій смыслъ координатъ бивектора, легко видѣть, что

$$x'_1 = x_2, x'_2 = x_3, x'_3 = x_1; \quad x'_4 = x_5, x'_5 = x_6, x'_6 = x_4.$$

Подобныя же соотношенія будутъ между y' и y , z' и z . Изъ нихъ между прочимъ слѣдуетъ:

$$\begin{aligned} z'_1 &= \varphi_1(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, x'_6; y'_1, y'_2, y'_3, y'_4, y'_5, y'_6) = \\ &= \varphi_1(x_2, x_3, x_1, x_5, x_6, x_4; y_2, y_3, y_1, y_5, y_6, y_4); \end{aligned}$$

съ другой стороны

$$z'_1 = z_2 = \varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6; y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6),$$

и, слѣд.,

$$\begin{aligned} &\varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6; y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = \\ &= \varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6; y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6), \end{aligned}$$

т. е. подстановка

$$\left(\frac{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6}{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6} \right) = (x_1 x_2 x_3)(x_4 x_5 x_6)(y_1 y_2 y_3)(y_4 y_5 y_6). \quad (\text{S})$$

переводить функцию φ_1 въ φ_2 . Такимъ же образомъ найдемъ, что также подстановка переводитъ φ_2 въ φ_3 , φ_3 въ φ_1 и да-лѣе φ_4 въ φ_5 , φ_5 въ φ_6 и φ_6 въ φ_4 . Мы видимъ т. о., что функции φ_i разбиваются на двѣ группы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$; первыя легко получаются изъ φ_1 , а вторыя изъ φ_4 .

II. Измѣняемъ безконечно мало систему координатъ; тогда, на основаніи вышесказаннаго, безконечно малыя приращенія функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ должны выразиться формулами, которыя мы получимъ, замѣнивъ въ (6) $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ соотвѣтственно черезъ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$. Извѣстно, что изъ шести ур., такимъ образомъ полученныхъ, мы выпишемъ только первое и четвертое:

$$\delta\varphi_1 = \varphi_2 \delta c - \varphi_4 \delta b$$

$$\delta\varphi_4 = \varphi_5 \delta c - \varphi_6 \delta b + \varphi_1 \delta n - \varphi_3 \delta m$$

Съ другой стороны приращенія $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_4$ выразятся т. о.

$$\delta\varphi_1 = L_1 \delta l + M_1 \delta m + N_1 \delta n + \mathfrak{A}_1 \delta a + \mathfrak{B}_1 \delta b + \mathfrak{C}_1 \delta c$$

$$\delta\varphi_4 = L_4 \delta l + M_4 \delta m + N_4 \delta n + \mathfrak{A}_4 \delta a + \mathfrak{B}_4 \delta b + \mathfrak{C}_4 \delta c$$

гдѣ $L_1, M_1, N_1, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1; L_4, M_4, N_4, \mathfrak{A}_4, \mathfrak{B}_4, \mathfrak{C}_4$ получаются изъ выражений для $L, M, N, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, данныхъ въ § 8 замѣнной φ одинъ разъ черезъ φ_1 , а въ другой — черезъ φ_4 . Сравнивая вы-

раженія для $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_3$ мы получимъ:

$$\begin{aligned} L_1 &= 0, M_1 = 0, N_1 = 0 \\ \mathfrak{A}_1 &= 0, \mathfrak{B}_1 = -\varphi_3, \mathfrak{C}_1 = \varphi_2 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} (c) \\ (d) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} L_4 &= 0, M_4 = -\varphi_3, N_4 = \varphi_2 \\ \mathfrak{A}_4 &= 0, \mathfrak{B}_4 = -\varphi_3, \mathfrak{C}_4 = \varphi_2 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} (e) \\ (f) \end{array} \right.$$

13. Изъ первой группы шести ур., въ которыхъ входятъ только $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, эти послѣднія могутъ быть опредѣлены. Ур. $L_1 = M_1 = N_1 = 0$, тожественные по виду съ ур. $L = M = N = 0$, которымъ въ § 9 должна была удовлетворять функция φ , даютъ намъ тѣ же соотношенія между коэффиціентами p_{ik} , которыхъ раньше мы имѣли между коэффиціентами s_{ik} : $p_{14} = p_{25} = p_{36} = p_{41} = p_{52} = p_{63} = u$ и всѣ остальные коэффиціенты, имѣющіе хотя одинъ значекъ > 3 , равны нулю. Т. о. ур. (c) даютъ для φ_1 выражение

$$\varphi_1 = u(x_1y_4 + x_2y_5 + x_3y_6 + x_4y_1 + x_5y_2 + x_6y_3) + \sum_1^3 p_{ik}x_iy_k \quad (g)$$

Составивъ функции φ_1 и φ_3 изъ φ_1 подстановкой (S), вносимъ теперь выраженія φ_1 , φ_2 и φ_3 въ ур. (d) и сравниваемъ коэффиціенты при одинаковыхъ x и y ; мы находимъ тогда

$$\begin{aligned} p_{11} &= p_{21} = p_{31} = p_{41} = 0 \\ p_{12} + p_{22} &= 0 \\ p_{11} &= p_{22} = p_{33} = u = 0 \end{aligned}$$

такъ что, обозначая p_{ii} черезъ v , мы имѣемъ

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= v(x_1y_4 - x_3y_2) \\ \varphi_2 &= v(x_2y_1 - x_1y_3) \\ \varphi_3 &= v(x_1y_2 - x_2y_1) \end{aligned}$$

при чмъ φ_2 и φ_3 получаются изъ φ_1 подстановкой (S). Вотъ общій видъ функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, удовлетворяющихъ ур. (c) и (d).

Опредѣливъ функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, обращаемся ко второй группѣ ур. (e) и (f). Изъ ур. (e), сравнивая коэффициенты при одинаковыхъ x и y , мы находимъ

$$a_{51} = a_{54} = a_{55} = a_{56} = 0$$

$$a_{61} = a_{64} = a_{65} = a_{66} = 0$$

$$a_{15} = a_{45} = a_{55} = a_{65} = 0$$

$$a_{46} = -a_{52} = v$$

$$a_{16} = a_{46} = a_{56} = a_{66} = 0$$

$$a_{53} = -a_{35} = v$$

$$a_{14} = a_{25} = a_{36} = a_{41} = a_{52} = a_{63} = s$$

$$a_{24} = a_{43} = a_{34} = a_{43} = 0,$$

и слѣд.

$$\begin{aligned} \varphi_4 = & s(x_1y_4 + x_2y_5 + x_3y_6 + x_4y_1 + x_5y_2 + x_6y_3) + \sum_1^3 a_{ik}x_iy_k \\ & + v(x_2y_6 - x_3y_5 - y_1x_6 + y_2x_5) \end{aligned}$$

Отсюда подстановкой (S) получимъ φ_5 и φ_6 . Оставшіеся неопределѣленными коэффициенты этихъ функций мы должны подобрать т. о., чтобы функции $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ удовлетворяли ур. (f). Съ этою цѣлью мы должны были бы подставить $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ въ ур. (f) и затѣмъ сравнить коэффициенты при одинаковыхъ x и y . Мы можемъ, однако, упростить вычисленіе, если разобьемъ каждую изъ функций $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ на сумму двухъ: $\varphi_{i+3} = \psi_{i+3} + \chi_{i+3}$ ($i = 1, 2, 3$), гдѣ χ_{i+3} означаютъ члены, имѣющіе коэффициентомъ v , и ψ_{i+3} всѣ остальные члены. Легко убѣдиться, что функции χ_{i+3} тождественно удовлетворяютъ, ур. (f), а потому уравненія (f), благодаря ихъ линейному виду, будутъ удовлетворены функциями ψ_{i+3} , если имъ будутъ удовлетворять функции ψ_{i+3} . Но функции ψ_{i+3} тождественны по виду съ выраженіями, полученными нами выше для функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ (g), и ур. (f), которымъ должны теперь удовлетворять ψ_1, ψ_2, ψ_3 , тождественны съ ур. (d), которымъ должны были удовлетворять функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$; отсюда прямо слѣдуетъ, что ψ_1 должно имѣть одинаковый видъ съ φ_1 : $\psi_1 = v_1(x_2y_5 - x_3y_4)$, гдѣ $v_1 = a_{15}$.

и т. о.

$$\varphi_4 = v(x_5y_6 - x_3y_5 - y_3x_6 + y_5x_3) + v_1(x_5y_3 - x_3y_5)$$

$$\varphi_5 = v(x_3y_4 - x_1y_6 - y_3x_4 + y_1x_6) + v_1(x_3y_1 - x_1y_3)$$

$$\varphi_6 = v(x_1y_5 - x_3y_4 - y_1x_5 + y_2x_4) + v_1(x_1y_2 - x_3y_1)$$

при чём φ_6 и φ_5 найдутся подстановкой (S).

14. Определяя видъ функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$, мы пользовались только некоторыми равенствами, которымъ должны были удовлетворять эти функции. Поэтому мы можемъ пока только утверждать, что функций, удовлетворяющихъ условіямъ A и B болѣе общаго вида, чѣмъ найденные нами функции φ , не существуютъ, но остается еще проверить дѣйствительно ли эти функции удовлетворяютъ условіямъ B при всякихъ преобразованіяхъ координатъ. Сдѣлать эту проверку не трудно, а потому мы на ней останавливаться не будемъ.

Мы видимъ, что функции φ содержать два остающихся неопределенныхъ коэффиціента v и v_1 . Каждой системѣ ихъ значений отвѣчаетъ одинъ определенный бивекторъ и определенная операциѣ построения бивектора; каждый изъ этихъ бивекторовъ мы можемъ назвать произведеніемъ и каждую изъ соответствующихъ операций — умноженіемъ. Изъ нихъ мы выдѣлимъ, однако, одинъ бивекторъ, отвѣчающій значениямъ $v_1 = 0, v = 1$ и будемъ называть его векторнымъ произведеніемъ бивектора β на α . Выдѣлить именно этотъ бивекторъ заставляетъ насъ то соображеніе, что бивекторы, отвѣчающіе другимъ значениямъ v и v_1 имѣютъ съ нимъ общую ось и получаются изъ него весьма просто, если мы увеличимъ его параметръ на $\frac{v_1}{v}$ и умножимъ главный векторъ на v . Кроме того, считать $v_1 = 0, v = 1$ мы должны еще и по той причинѣ, что въ частномъ случаѣ, когда бивекторы обратятся въ векторы, имѣющіе общее начало т. е. $x_1 = x_3 = x_5 = y_4 = y_5 = y_6 = 0$ векторное произведеніе бивекторовъ должно обратиться въ векторное произведеніе векторовъ $(x_1x_3x_5)$ и $(y_4y_5y_6)$, и, слѣд.,

$$z_1 = x_3y_5 - x_5y_3 \quad z_4 = 0$$

$$z_2 = x_3y_4 - x_4y_3 \quad z_5 = 0$$

$$z_3 = x_1y_5 - x_5y_1 \quad z_6 = 0,$$

отвѣда $v=1$, $v_1=0$.

Итакъ, возвращающа къ прежнимъ обозначеніямъ координатъ бивектора буквами p, q, r, a, b, c , мы будемъ называть векторнымъ произведеніемъ β на α бивектора $V\alpha\beta$, координаты котораго суть:

$$\begin{aligned} P &= qr_1 - qr_1 & A &= qc_1 - rb_1 - (q_1 c - r_1 b) \\ Q &= rp_1 - r_1 p & B &= ra_1 - pc_1 - (r_1 a - p_1 c) \\ R &= pq_1 - p_1 q & C &= pb_1 - qa_1 - (p_1 b - q_1 a) \end{aligned} \quad (8)$$

При этихъ обозначеніяхъ бивекторъ самаго общаго вида, удовлетворяющій условіямъ A и B , имѣть такія координаты:

$$\begin{aligned} vP, & \quad vQ, & \quad vR \\ vA + v_1 P, & \quad vB + v_1 Q, & \quad vC + v_1 R. \end{aligned}$$

15. Анализъ операциі умноженія бивектора на бивекторъ, произведенный нами въ предъидущихъ параграфахъ, можетъ быть безъ существенныхъ измѣненій приложенъ къ разысканію самаго общаго вида операциі умноженія бивектора на постоянное число и постояннаго числа на бивекторъ. Опредѣляя эти операциі какъ операциі двояко дистрибутивныя по отношенію къ сложенію, дающія результатъ независимый отъ системы координатъ, мы пришли бы къ слѣдующимъ заключеніямъ: обѣ операциі тожественны, скалярное произведение бивектора α на постоянное число v всегда = 0, векторное произведение есть бивекторъ, координаты котораго суть:

$$\begin{aligned} vsP, & \quad vsQ, & \quad vsR \\ vsA + v_1 sp, & \quad vsB + v_1 sq, & \quad vsC + v_1 sr. \end{aligned}$$

Мы не будемъ, однако, останавливаться на этомъ анализѣ, т. к. далѣе мы встрѣтимся съ операцией болѣе общаго вида умноженія бивектора на нѣкоторое комплексное число.

16. Произведеніе. Символъ ω . Примемъ опредѣленную точку O за точку приведенія всѣхъ бивекторовъ, которые мы рассматриваемъ, и нѣкоторую систему трехъ взаимно перпенди-

кулярныхъ прямыхъ за координатную систему. Начало каждого вектора мы помѣщаемъ въ точкѣ O и всякий векторъ опредѣляемъ проекціями на координатныя оси. Условимся надѣ векторами, имѣющими начало въ точкѣ O , производить операциі по тѣмъ законамъ, по которымъ мы производимъ операциі подѣ векторами въ теоріи кватерніоновъ, иначе говоря условимся представлять всякой векторъ (l,m,n) комплекснымъ числомъ вида:

$$li + mj + nk$$

гдѣ i, j, k —извѣстные символы теоріи кватерніоновъ, для которыхъ слѣдующая таблица

	i	j	k	
i	—1	k	— j	(9)
j	— k	—1	i	
k	j	— i	—1	

служитъ таблицей умноженія.

Всякій бивекторъ (p,q,r,a,b,c) мы характеризуемъ двумя векторами $\Omega(p,q,r)$ и $V(a,b,c)$. Однако въ частныхъ случаяхъ для опредѣленія бивектора намъ достаточно знать одинъ векторъ. Такъ, бивекторъ безконечно большаго параметра $(0,0,0,a,b,c)$ опредѣляется однимъ векторомъ $V(a,b,c)$, для него $\Omega=0$; бивекторъ $(p,q,r,0,0,0)$ параметра нуль опредѣляется однимъ векторомъ Ω ; для него $V=0$. Имѣя, слѣдовательно, нѣкоторый векторъ $\beta(l,m,n)$, мы можемъ характеризовать имъ два существенно различныхъ бивектора: бивекторъ безконечно большаго параметра $(0,0,0,l,m,n)$ и бивекторъ параметра нуль $(l,m,n,0,0,0)$. Мы должны, поэтому, имѣть какоенибудь средство, чтобы различать оба эти бивектора, опредѣляемые однимъ и тѣмъ же векторомъ. Съ этою цѣлью условимся бивекторъ $(l,m,n,0,0,0)$ характеризовать тѣмъ же символомъ (буквой, комплекснымъ числомъ), которымъ мы характеризуемъ векторъ (l,m,n) , а для обозначенія бивектора $(0,0,0,l,m,n)$ употреблять тотъ же символъ, сопровождая его факторомъ ω . Т. о., если β есть векторъ (l,m,n) , то той же буквой β мы

означаемъ и бивекторъ $(l,m,n,0,0,0)$, произведеніемъ же $\omega\beta$ — бивекторъ $(0,0,0,l,m,n)$.

Знаку β мы придаємъ, слѣд., двоякій смыслъ, мы разсматриваемъ или его какъ символъ, характеризующій нѣкоторый векторъ (l,m,n) , или какъ символъ, характеризующій бивекторъ $(l,m,n,0,0,0)$. Соответственно этимъ двумъ значеніямъ β и символу ω мы должны приписать двоякое значеніе. Если β есть векторъ (l,m,n) , то ω есть символъ, который являясь факторомъ β приписывается этому вектору определенный смыслъ, заставляетъ насъ принимать его за векторъ, опредѣляющій бивекторъ $(0,0,0,l,m,n)$ безконечно большаго параметра. Если подъ β мы подразумѣваемъ бивекторъ $(l,m,n,0,0,0)$, то умножая его на символъ ω , мы получимъ бивекторъ $\omega\beta$ $(0,0,0,l,m,n)$, такъ что символъ ω , являясь множителемъ бивектора параметра нуль, преобразуетъ его въ бивекторъ безконечно большаго параметра.

Пусть мы имѣемъ два вектора $\alpha_0(p,q,r)$ и $\alpha_1(a,b,c)$; бивекторы α_0 , и $\omega\alpha_1$ имѣютъ своими координатами величины $(p,q,r,0,0,0)$ и $(0,0,0,a,b,c)$. Бивекторъ α (p,q,r,a,b,c) мы можемъ рассматривать какъ сумму бивекторовъ α_0 и $\omega\alpha_1$:

$$\alpha = \alpha_0 + \omega\alpha_1 \quad (10)$$

Выражая векторы комплексными числами: $\alpha_0 = pi + qj + rk$, $\alpha_1 = ai + bj + ck$, мы можемъ бивекторъ α представить комплекснымъ числомъ

$$\alpha = pi + qj + rk + \omega(ai + bj + ck) \quad (11)$$

Итакъ каждый бивекторъ α мы можемъ представить или въ видѣ суммы $\alpha_0 + \omega\alpha_1$, двухъ векторовъ, изъ которыхъ второй умноженъ на символъ ω , или въ видѣ комплекснаго числа $pi + qj + rk + \omega(ai + bj + ck)$, у котораго коэффициентами при комплексныхъ единицахъ служатъ координаты бивектора.

17. Съ цѣлью раскрыть свойства символа ω , умножимъ выражение $\beta_0 + \omega\beta_1 = p_1i + q_1j + r_1k + \omega(a_1i + b_1j + c_1k)$ представляющее бивекторъ β , на выражение $\alpha_0 + \omega\alpha_1$ такъ, какъ если бы символъ ω былъ вѣкторомъ неопределенной величиной и, опираясь на наши изслѣдованія въ §§ (6—15), посмотримъ

какія свойства мы должны приписать символу ω , чтобы полученнное выражение мы могли назвать произведениемъ β на a . Мы будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} (\alpha_0 + \omega\alpha_1)(\beta_0 + \omega\beta_1) &= \alpha_0\beta_0 + \omega(\alpha_1\beta_0 + \alpha_0\beta_1) + \omega^2\alpha_1\beta_1 \\ &= -(pp_1 + qq_1 + rr_1) - \omega(pa_1 + qb_1 + rc_1 + p_1a + q_1b + r_1c) \\ &\quad + Pi + Qj + Rk + \omega(Ai + Bj + Ck) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\omega^3[-(aa_1 + bb_1 + cc_1) + i(bc_1 - b_1c) + j(ca_1 - c_1a) + k(ac_1 - a_1b)]$$

гдѣ P, Q, R, A, B, C суть координаты бивектора $Va\beta$ (форм. 8). Разматривая это выражение, мы видимъ прежде всего, что должны нѣсколько расширить значение символа ω , который пока имѣеть только смыслъ какъ факторъ вектора или бивектора, теперь же, во второмъ членѣ, является множителемъ нѣкоторой скалярной величины. Припишемъ, поэтому, символу ω еще одно значение: будемъ считать его нѣкоторой комплексной единицей, такъ что первая строка предыдущаго выражения будетъ представлять для насъ комплексное число вида $S_0 + \omega S_1$. Сравнивая его съ выражениемъ (7), мы видимъ, что оно отличается отъ $Sa\beta$ только тѣмъ, что вместо k въ немъ стоитъ символъ ω ; k означало у насъ неопределенную величину, будемъ считать теперь это k за символъ ω и собразно съ этимъ видоизмѣнимъ опредѣление скалярного произведения бивекторовъ β на a т. о.:

Скалярнымъ произведениемъ бивектора β на бивекторъ a , мы будемъ наз. комплексное число

$$Sa\beta = -(pp_1 + qq_1 + rr_1) - \omega(pa_1 + qb_1 + rc_1 + p_1a + q_1b + r_1c) \quad 13.$$

Итакъ первая строка предыдущаго выражения, взятая отдельно, есть $Sa\beta$.

Вторая строка представляетъ комплексное число, опредѣляющее $Va\beta$ и слѣд. первые двѣ строки мы можемъ представить въ видѣ $Sa\beta + Va\beta$.

Если мы возьмемъ новую точку приведенія и составимъ изъ новыхъ координатъ бивекторовъ a и β выражение (12), то изъ §§ 8 и 12 будетъ слѣдоватъ, что первая строка нового выражения по прежнему будетъ представляться $Sa\beta$, что вторая строка будетъ комплекснымъ числомъ, опредѣляющимъ

тотъ же бивекторъ $V\alpha\beta$ относительно новой системы координатъ, такъ что первыя двѣ строки будутъ имѣть для насъ прежнее значение $S\alpha\beta + V\alpha\beta$. Что же касается до кватерниона, на который умножается ω^1 , то съ перемѣнной точкой приведенія онъ будетъ измѣняться. Поэтому, если мы хотимъ выражение (12) назвать произведеніемъ β на α и хотимъ, чтобы оно удовлетворяло условію B , то мы должны совершенно отбросить членъ $\omega^1\alpha_1\beta_1$, иначе говоря должны символу ω приписать еще одно свойство:

Всякое выражение, будучи дважды умножено на символъ ω , исчезаетъ, или $\omega^2 = 0$.

При этомъ условіи, какова бы ни была координатная система, къ которой мы относимъ бивекторы α и β , предвидувшее выражение имѣеть видъ $S\alpha\beta + V\alpha\beta$. Если мы означимъ его буквами α и β , поставивъ ихъ рядомъ, и условимся складывать такія выражения такъ, какъ если бы ω было не определенной величиной, то легко видѣть, что

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma; (\alpha + \gamma)\beta = \alpha\beta + \gamma\beta,$$

гдѣ γ есть какой либо бивекторъ. Т. о. выражение $\alpha\beta$ будетъ удовлетворять и требованію A , и мы можемъ назвать его произведеніемъ β на α . Группируя иначе члены $\alpha\beta$ имѣемъ:

$$\alpha\beta = \alpha_0\beta_0 + \omega(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0)$$

или $\alpha\beta = q = q_0 + \omega q_1, \quad (14)$

гдѣ $q_0 = -(pp_1 + qq_1 + rr_1) + Pi + Qj + Rk$ (15)
 $q_1 = -(pa_1 + qb_1 + rc_1 + p_1a + q_1b + r_1c) + Ai + Bj + Ck$

Выраженіе вида (14) было названо Clifford'омъ биквaternionомъ (Preliminary Sketch of Biquaternions). Часть его, состоящая изъ членовъ, не умноженныхъ на символы i, j, k , наз. скалярною частью, и означается буквой S , остальная же часть векторною частью и означается буквой V .

Итакъ мы можемъ резюмировать результаты настоящей главы слѣдующимъ образомъ:

Произведение бивектора β на бивектор α есть бикватернион $q = q_0 + \omega q_1$, где q_0 и q_1 суть кватернионы, определяемые формулами (15), а символ ω — комплексная единица, обладающая следующими свойствами:

I. умножая на ω бивектор параметра нуль, мы получаем бивектор безконечно большого параметра,

II. квадрат ω равен нулю: $\omega^2 = 0$.

Какова бы ни была координатная система, къ которой мы относим бивекторы α и β , скалярная часть q не изменяется, векторная же часть всегда представляет комплексное число, определяющее один и тот же бивектор, отнесенный къ соответствующей системѣ координат.

Скалярная часть бикватерниона q есть скалярное произведение, векторная часть определяет векторное произведение β на α .

Глава II.

18. Комплексные числа вида $a_0 + \omega a_1, \omega^2 = 0$. Чтобы установить законы операций надъ бикватернионами, мы обратимся прежде всего къ изучению комплексныхъ чиселъ вида $a_0 + \omega a_1$, где a_0 и a_1 суть нѣкоторые действительныя, или мнимыя числа $c + d\sqrt{-1}$, а ω комплексная единица, обладающая свойствомъ $\omega^2 = 0$. Означая комплексное число $a_0 + \omega a_1$ одной буквой a , будемъ наз. a_0 главною частью, a_1 моментомъ и отношение $a_1 : a_0$ параметромъ числа a ; этотъ послѣдній мы будемъ означать буквой P , ставя ее передъ a , такъ что $Pa = a_1 : a_0$. Условимся говорить, что число a становится вещественнымъ, когда a_1 обращается въ нуль. Числа a_0 и ωa_1 неприводимы одно къ другому, а потому $a = 0$ тогда и только тогда, когда $a_0 = a_1 = 0$ и два числа $a = a_0 + \omega a_1, b = b_0 + \omega b_1$, равны только при $a_0 = b_0$ и $a_1 = b_1$.

Сумму чиселъ a и b мы опредѣлимъ формулой:

$$a + b = a_0 + b_0 + \omega(a_1 + b_1), \quad (1)$$

изъ которой видимъ, что $a + b = b + a, a + (b + c) = (a + b) + c$, т. е. что сложеніе коммутативно и ассоціативно.

Въ силу свойства $\omega^2=0$, произведение b на a выразится комплекснымъ числомъ такого же типа:

$$\begin{aligned} ab &= a_0 b_0 + \omega(a_1 b_0 + a_0 b_1), \\ \text{отсюда им'емъ: } ab &= ba, \quad a(bc) = (ab)c \\ a(b+c) &= ab + ac, (a+c)b = ab + cb, \end{aligned} \tag{2}$$

т. е. система чисель вида $a_0 + \omega a_1$ есть замкнутая система, операциі умноженія коммутативна, асоціативна и по отношению къ сложенію дистрибутивна.

Опредѣлля операціі вычитанія, дѣленія и извлеченія корня, какъ операціі обратныя сложенію, умноженію и возведенію въ степень, им'емъ:

$$\begin{aligned} a - b &= a_0 - b_0 + \omega(a_1 - b_1) \\ \frac{b}{a} &= \frac{b_0}{a_0} + \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_0^2} \omega \\ \sqrt{a} &= \sqrt{a_0} \left(1 + \frac{a_1}{2a_0}\omega\right) \end{aligned} \tag{3}$$

Изъ этихъ формулъ слѣдуетъ:

I. Основныя операціі подъ числами вида $a_0 + \omega a_1$ производятся такъ, какъ если бы ω было безконечно малой величиной, квадратами и высшими степенями которой мы пренебрегаемъ.

II. Операціі надъ числами вида $a_0 + \omega a_1$ подчиняются законамъ обыкновенной алгебры.

Замѣтимъ, однако, что рассматриваемыя комплексныя числа представляютъ нѣкоторыя особенности, когда главныя части ихъ обращаются въ нуль.

Укажемъ здѣсь слѣдующія:

I. Произведеніе двухъ, или нѣсколькихъ чисель обращается въ нуль, или когда одинъ изъ множителей равенъ нулю, или когда главныя части двухъ множителей равны нулю (или, что все равно, параметры двухъ множителей равны безконечности).

II. Параметръ произведенія двухъ, или нѣсколькихъ чи- сель равняется безконечности, когда параметръ *только одного* множителя обращается въ безконечность.

III. Когда $a_0 = b_0 = 0$, то частное $\frac{b}{a} = \frac{b_1}{a_1} + k\omega$, где k неопределено.

IV. По определению корня квадратного, $\sqrt{0}$ есть неопределенное число вида $k\omega$; число k определяется, если в выражении \sqrt{a} известен законъ по которому a_0 и a_1 приближаются нулю.

19. Функции отъ комплексныхъ чиселъ вида $a = a_0 + \omega a_1$. Всякое выражение вида $f(a_0, a_1) + \omega f_1(a_0, a_1)$, где $f(a_0, a_1)$ и $f_1(a_0, a_1)$ суть некоторые функции отъ a_0, a_1 , есть комплексное число, принадлежащее къ области рассматриваемыхъ здѣсь чиселъ и зависитъ отъ $a = a_0 + \omega a_1$. Слѣдуя за G. Scheffers'омъ (Verallgemeinerung der Grundlagen der gewöhnlichen complexen Functionen, Berichte der Sächsischen Gesellschaft, 1893 и 94), такое выражение мы только тогда будемъ называть функцией отъ комплекснаго переменнаго $a = a_0 + \omega a_1$, когда отношение его безконечно малаго приращенія къ соответствующему приращенію переменнаго независимаго $da = da_0 + \omega da_1$:

$$\frac{\partial f}{\partial a_0} + \frac{\partial f}{\partial a_1} \frac{da_1}{da_0} + \omega \left[\frac{\partial f_1}{\partial a_0} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial a_1} - \frac{\partial f}{\partial a_0} \right) \frac{da_1}{da_0} - \frac{\partial f}{\partial a_1} \left(\frac{da_1}{da_0} \right)^2 \right]$$

не зависитъ отъ отношения $da_1 : da_0$, каковы бы ни были a_0 и a_1 . Легко видѣть, что при такомъ определеніи самый общий видъ функции отъ a будетъ:

$$f(a_0) + \omega [a_1 f'(a_0) + f_1(a_0)] \quad (4)$$

гдѣ $f(a_0)$ и $f_1(a_0)$ —произвольныя функции отъ a_0 .

Подобнымъ же образомъ, опредѣляя функцию отъ несколькиихъ переменнныхъ $a = a_0 + \omega a_1, b = b_0 + \omega b_1, c = c_0 + \omega c_1, \dots$ какъ выражение $f(a_0, a_1, b_0, b_1, \dots) + \omega f_1(a_0, b_0, a_1, b_1, \dots)$, которое было бы функцией каждого изъ переменнныхъ, взятаго въ отдельности, мы найдемъ, что самый общий видъ функции отъ a, b, c, \dots таковъ:

$$f(a_0, b_0, c_0, \dots) + \omega \left[a_1 \frac{\partial f}{\partial a_0} + b_1 \frac{\partial f}{\partial b_0} + c_1 \frac{\partial f}{\partial c_0} + \dots + f_1(a_0, b_0, c_0, \dots) \right] \quad (5)$$

гдѣ f и f_1 —произвольныя функции отъ a_0, b_0, c_0, \dots

Рассматривая функцию отъ одной независимой переменной, мы видимъ, что функция, вообще говоря, не является вещественной, когда переменное $a=a_0+\omega a_1$ становится вещественнымъ, т. е. когда $a_1=0$, таъ что въ области комплексныхъ чиселъ рассматриваемаго типа всякое выражение $F(a_0)=f(a_0)+\omega f_1(a_0)$, мы должны считать функцией отъ a_0 . Понятно, что производной этой функции будетъ $F'(a_0)=f'(a_0)+\omega f_1'(a_0)$ и интеграломъ — $F^{-1}(a_0)=f^{-1}(a_0)+\omega f_1^{-1}(a_0)+C$, где $f^{-1}(a_0)$ и $f_1^{-1}(a_0)$ суть интегралы отъ $f(a_0)$ и $f_1(a_0)$ и C —произвольная постоянная.

Изъ формулы (4) слѣдуетъ далѣе, что функция отъ a вполнѣ опредѣляется двумя функциями $f(a_0)$ и $f_1(a_0)$. Но функция отъ a принимаетъ видъ $f(a_0)+\omega f_1(a_0)$, когда переменная становится вещественною, и потому функции $f(a_0)$ и $f_1(a_0)$ будутъ намъ извѣстны, если извѣстны значенія функции отъ $a=a_0+\omega a_1$ при вещественныхъ значеніяхъ комплексной переменной. Итакъ функция отъ комплексной переменной вполнѣ опредѣляется, если намъ даны ея значенія для вещественныхъ значеній переменной независимой.

Чтобы по данному значенію функции отъ вещественного переменного $F(a_0)=f(a_0)+\omega f_1(a_0)$ получить ея выражение $F(a)$, когда переменная становится комплексной, мы должны къ $F(a_0)$ присоединить членъ $\omega a_1 f'(a_0)=\omega a_1 F'(a_0)$ (см. форм. 4), и слѣд.:

$$F(a)=F(a_0)+\omega a_1 F'(a_0). \quad (6)$$

Сказанное относительно функции отъ одной независимой переменной справедливо и для функции нѣсколькихъ переменныхъ: функция $F(a_0, b_0, c_0, \dots) = f(a_0, b_0, c_0, \dots) + \omega f_1(a_0, b_0, c_0, \dots)$ отъ вещественныхъ переменныхъ, когда переменные остановятся комплексными, принимаетъ видъ

$$F(a, b, c, \dots) = F(a_0, b_0, c_0, \dots) + \omega \left[a_1 \frac{\partial F}{\partial a_0} + b_1 \frac{\partial F}{\partial b_0} + c_1 \frac{\partial F}{\partial c_0} + \dots \right]. \quad (7)$$

Формулы, опредѣляющія $F(a)$ и $F(a, b, c, \dots)$, мы очевидно получаемъ, если въ выраженіяхъ функций $F(a_0)$ и $F(a_0, b_0, c_0, \dots)$ вместо a_0, b_0, c_0, \dots подставимъ a, b, c, \dots и затѣмъ, принявъ ω за безконечно малую величину, разложимъ функции

F въ строку по степенямъ ω и ограничимся первою степенью ω .

Изъ формулъ (4) и (5), или (6) и (7) вытекаютъ слѣдующія свойства функцій отъ комплексныхъ переменныхъ.

I. Если $b = b_0 + \omega b_1$, есть функція отъ $a = a_0 + \omega a_1$, то обратно a есть функція отъ b .

II. Если $c = c_0 + \omega c_1$, есть функція отъ b , и b —функція отъ a , то c будетъ функціей отъ a .

III. Если комплексные переменные a и b связаны между собой ур. $F(a, b) = 0$, гдѣ $F(a, b)$ есть функція отъ a и b , то b будетъ функціей отъ a и a —функціей отъ b .

Опредѣляя производную отъ $F(a)$ какъ отношение приращенія, получаемаго функціей $F(a)$ при безконечно маломъ приращеніи a : $da = da_0 + da_1$, въ этому послѣднему, не трудно показать, что

$$F'(a) = F'(a_0) + \omega a F'(a_0) = f'(a_0) + \omega [a_1 f''(a_0) + f'_1(a_0)].$$

Производная, какъ видимъ, есть также функція отъ a .

Если интеграломъ функціи $F(a)$ мы назовемъ такую функцію отъ a , означимъ ее черезъ $F^{-1}(a)$, что ея производная равняется $F(a)$, то

$$\begin{aligned} F^{-1}(a) &= F^{-1}(a_0) + \omega a_1 F(a_0) + C = \\ &= f^{-1}(a_0) + \omega [a_1 f(a_0) + f^{-1}(a_0)] + C, \end{aligned}$$

гдѣ $C = C_0 + \omega C_1$ есть произвольная постоянная.

Въ дальнѣйшемъ для насъ особенно важны будуть тѣ функціи, которые при $a = a_0$ ($a_1 = 0$) становятся вещественными. Изъ предыдущаго ясно, что каждой вещественной функціи отъ одной, или нѣсколькихъ вещественныхъ переменныхъ $f(a_0)$, или $f(a_0, b_0, c_0, \dots)$ соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленная функція, когда переменные становятся комплексными, а именно:

$$f(a) = f(a_0) + \omega a_1 f'(a_0)$$

$$f(a, b, c, \dots) = f(a_0, b_0, c_0, \dots) + \omega \left[a_1 \frac{\partial f}{\partial a_0} + b_1 \frac{\partial f}{\partial b_0} + c_1 \frac{\partial f}{\partial c_0} + \dots \right],$$

$$\text{отсюда } Pf(a, b, c, \dots) = a_1 \frac{\partial \lg f}{\partial a_0} + b_1 \frac{\partial \lg f}{\partial b_0} + c_1 \frac{\partial \lg f}{\partial c_0} + \dots$$

Изъ предыдущихъ формулъ мы получимъ слѣдующія выраженія для косинуса, синуса, логарифма и т. д. отъ комплексныхъ переменныхъ a, b, c, \dots :

$$\begin{aligned} csa &= csa_0 - \omega a_1 sna_0 & Pcsa &= -a_1 tga_0 \\ sna &= sna_0 + \omega a_1 csa_0 & Psna &= a_1 ctga_0 \\ tga &= \frac{sna}{csa} = tga_0 + \omega \frac{a_1}{cs^2 a_0} & Ptga &= \frac{2a_1}{sn2a_0} \\ lga &= lga_0 + \omega \frac{a_1}{a_0} = lga_0 + \omega Pa & Plga &= \frac{Pa}{lga_0} \\ ab &= a_0 b_0 [1 + \omega (Pa.b_0 + lga_0 b_1)] & Pa^b &= b_0 (Pa + lga_0 Fb) \end{aligned} \quad (8)$$

Отсюда имѣемъ рядъ соотношеній:

$$\begin{aligned} cs^2 a + sn^2 a &= 1; \quad sn(a+b) = sna \ cos b + csa \ sin b \\ (ab)^c &= a^{bc}, \quad a^b a^c = a^{b+c} \text{ и т. д., и т. д.} \end{aligned}$$

$$\frac{dsna}{da} = csa; \quad \frac{dcsa}{da} = -sna; \quad \frac{dlga}{da} = \frac{1}{a} \text{ и т. д., и т. д.}$$

20. Бикватерніоны. Сложение и вычитаніе. Скалярная и векторная части бикватерніона. Опредѣлимъ бикватерніонъ какъ комплексное число вида

$$\begin{aligned} q &= w + ix + jy + kz = \\ &= w_0 + \omega w_1 + (x_0 + \omega x_1)i + (y_0 + \omega y_1)j + (z_0 + \omega z_1)k \end{aligned} \quad (9)$$

гдѣ i, j, k суть известные Hamilton'овы символы—комплексныя единицы, для которыхъ таблицей умноженія служить таблица (9), гл. I. Мы опредѣляемъ т. о. бикватерніонъ какъ кватерніонъ, у котораго коэффиціентами при i, j, k и свободный членъ суть комплексныя числа вышеразсмотрѣнаго типа.

Сумму и разность бикватерніона q и

$$q' = w' + x'i + y'j + z'k,$$

гдѣ w', x', y', z' суть комплексныя числа, мы опредѣлимъ формулами:

$$q \pm q' = w \pm w' + (x \pm x')i + (y \pm y')j + (z \pm z')k \quad (10)$$

Изъ этого определенія слѣдуетъ:

I. Бикватерніонъ q мы можемъ разсматривать какъ сумму комплексныхъ чиселъ w и $xi + yj + zk$, такъ что, называя w скалярною частью, а $xi + yj + zk$ векторною частью бикватерніона q и означая ихъ соотвѣтственно Sq и Vq , имѣемъ:

$$\begin{aligned} Sq = w & \quad Vq = xi + yj + zk \\ q = Sq + Vq. & \end{aligned} \quad (11)$$

Бикватерніонъ есть сумма своихъ частей: скалярной и векторной.

Векторную часть, Vq , мы будемъ означать также одной буквой греческаго алфавита, напр. α , тогда

$$q = w + \alpha \quad (12)$$

II. Принимая во вниманіе слѣдствія изъ формулы (1), находимъ

$$\begin{aligned} q + q' &= q' + q \\ q + (q' + q'') &= (q + q') + q'', \end{aligned}$$

гдѣ q'' какой либо третій бикватерніонъ. Т. о. сложеніе бикватерніоновъ коммутативно и ассоціативно.

21. Умноженіе. Главная часть и моментъ бикватерніона. Произведеніемъ бикватерніона q' на q мы называемъ бикватерніонъ, который получится, если мы перемножимъ выраженія q и q' такъ, какъ если бы i, j, k были неопределеными величинами (причёмъ будемъ обращать вниманіе на порядокъ множителей i, j, k) и затѣмъ воспользуемся таблицей (9) гл. I; тогда мы будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} qq' = & (ww' - xx' - yy' - zz') \\ & + (wx' + w'x + yz' - y'z)i \\ & + (wy' + w'y + zx' - z'x)j \\ & + (wz' + w'z + xy' - x'y)k \end{aligned} \quad (13)$$

Бикватерніонъ q мы будемъ называть множителемъ, а бикватерніонъ q' — множимымъ; слѣдовательно, означая про-

изведеніе q' на q черезъ qq' мы ставимъ множитель передъ множимымъ.

Изъ формулы (13) слѣдуетъ:

I.

$$qq' = q'q$$

$$\begin{aligned} q(q' + q'') &= qq' + qq''; \quad (q' + q'')q = q'q + q''q \\ q(q'q'') &= (qq')q'' \end{aligned} \quad (14)$$

т. е. операциі умноженія бикватерніоновъ дистрибутивна по отношенію къ сложенію, ассоціативна и вообще говоря не коммутативна.

II. Сопоставляя формулы, опредѣляющія умноженіе и сложеніе бикватерніоновъ, легко видѣть, что члены, изъ которыхъ составляется бикватерніонъ, мы можемъ группировать какъ угодно и т. о. данный бикватерніонъ представлять въ различныхъ формахъ; укажемъ нѣкоторыя, чаще всего нами употребляемыя.

a. Соединяя отдельно члены, умноженные на i, j, k , мы имѣемъ бикватерніонъ въ формѣ, употребляемой нами выше (9).

b. Соединяя же вмѣстѣ члены, умноженные на ω , получаемъ:

$$q = q_0 + \omega q_i = w_0 + x_i i + y_i j + z_i k + \omega(w_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k).$$

q_0 будемъ называть главною частью, а q_i —моментомъ бикватерніона q .

c. Написавъ $q = Sq + Vq$ и означивъ главныя части Sq и Vq черезъ S_0q и V_0q , ихъ моменты черезъ S_1q и V_1q , имѣемъ:

$$Sq = S_0q + \omega S_1q = Sq_0 + \omega Sq_1; \quad Vq = V_0q + \omega V_1q = Vq_0 + \omega Vq_1$$

$$q = S_0q + \omega S_1q + V_0q + \omega V_1q = w_0 + \omega w_1 + \alpha_0 + \omega \alpha_1$$

22. Дѣленіе. Бикватерніоны сопряженный и обратный.
Норма бикватерніона. Такъ какъ умноженіе не коммутативно, то дѣленіе—операциі обратная умноженію—можетъ двухъ типовъ: мы опредѣляемъ дѣленіемъ или множитель по даннымъ множимому и произведенію, или множимое по даннымъ множителю и произведенію.

Рассмотрим сначала частный случай, когда один из данных множителей есть скалярное число $a = a_0 + \omega a_1$. Пусть q' данное произведение и q'' другой, искомый, множитель. Такъ какъ $aq'' = q''a$, то оба ур. $q''a = q'$ и $aq'' = q'$ имъютъ одно и то же рѣшеніе, и двѣ вышеупомянутыя операциі становятся тождественными. Слѣдовательно, не боясь недоразумѣній, мы можемъ писать $q'' = q':a = q'/a$, причемъ очевидно, что

$$q'' = \frac{q'}{a} = \frac{w'}{a} + \frac{x'}{a}i + \frac{y'}{b}j + \frac{z'}{c}k.$$

Чтобы въ только что разсмотрѣнному частному случаю привести общій, мы введемъ нѣсколько новыхъ понятій, встречающихся въ теоріи квартеніоновъ.

Бикватерніонъ $Sq - Vq$ будемъ называть сопряженнымъ съ даннымъ $q = Sq + Vq$ и будемъ означать его черезъ Kq , такъ что

$$Kq = Sq - Vq = w - xi - yj - zk. \quad (15)$$

Нормой бикватерніона q будемъ означать ее черезъ Nq —назовемъ комплексное число, опредѣляемое формулой:

$$Nq = qKq = (Sq + Vq)(Sq - Vq) = (Sq)^2 - (Vq)^2,$$

или $Nq = qKq = w^2 + x^2 + y^2 + z^2. \quad (16)$

Легко видѣть, что $Nq = NKq$.

Бикватерніонъ $Kq:Nq$ будемъ называть обратнымъ къ q ; означая его черезъ q^{-1} , имъемъ:

$$q^{-1} = \frac{Kq}{Nq}. \quad (17)$$

Обозначеніе q^{-1} оправдывается слѣдующими свойствами обратного бикватерніона:

$$qq^{-1} = q \frac{Kq}{Nq} = \frac{qKq}{Nq} = 1,$$

$$q^{-1}q = \frac{Kq}{Nq}q = \frac{Kq \cdot q}{Nq} = 1,$$

благодаря которымъ мы можемъ писать $q^{-1} = 1:q = 1/q$.

Пользуясь понятиемъ обратнаго бикватерніона, легко уже решить относительно q'' какъ ур. $q''q = q'$ такъ и ур. $qq'' = q'$. Чтобы определить q'' изъ первого ур., мы множимъ на него почленно тожество $q^{-1} = q'^{-1}$; получаемъ:

$$q''qq^{-1} = q'q^{-1}, \text{ или } q'' = q'q^{-1} = \frac{q'Kq}{Nq} \quad (18)$$

Если же мы хотимъ определить q'' изъ ур. $qq'' = q'$, то множимъ обѣ его части на q^{-1} ; тогда мы находимъ:

$$q^{-1}qq'' = q^{-1}q', \text{ или } q'' = q^{-1}q' = \frac{Kq \cdot q'}{Nq} \quad (19)$$

Замѣтимъ, что q'' , опредѣленное какъ неизвѣстный множитель изъ первого ур. $q''q = q'$, называется обыкновенно частнымъ отъ дѣленія q' на q и означается черезъ $q'/q = \frac{q'}{q}$. Пользуясь этимъ обозначеніемъ мы имѣемъ такія соотношенія:

$$\frac{q'}{q} q = (q'/q)q = q', \text{ но } q\frac{q'}{q} = q(q'/q) \neq q'$$

Что же касается до множимаго q'' , опредѣляемаго изъ ур. $qq'' = q'$, то для него не существуетъ особеннаго названія.

23. *Формулы развернутыя и неразвернутыя.* Разсмотрѣвъ основныя операциі надъ бикватерніонами, мы введемъ теперь нѣкоторыя новыя понятія, связанныя съ бикватерніономъ.

Замѣтимъ при этомъ, что многія формулы теоріи бикватерніоновъ мы можемъ писать двояко: или обозначая комплексныя числа, въ нихъ входящія, одною буквой, или вводя въ формулы явнымъ образомъ символъ ω и представляя ихъ въ видѣ $q_0 + \omega q_1$, где q_0 и q_1 суть, вообще говоря, нѣкоторые кватерніоны. Формулы въ первомъ видѣ, которые, какъ это мы увидимъ ниже, ничѣмъ не отличаются отъ формулъ теоріи кватерніоновъ, мы будемъ называть неразвернутыми, а во второмъ—развернутыми. Послѣднія легко выводятся изъ первыхъ, если мы вместо комплексныхъ чиселъ a, b, c, \dots , въ нихъ входящихъ, напишемъ $a_0 + \omega a_1, b_0 + \omega b_1, c_0 + \omega c_1, \dots$ и затѣмъ, принявъ ω за безконечно малую величину, разложимъ получен-

ныя выражения по степенямъ ω и ограничимся его первой степенью. Въ развернутыхъ формулахъ мы обыкновенно будемъ означать членъ свободный отъ ω значкомъ $_0$, а коэффициентъ при ω —значкомъ $_1$. Такими обозначеніями мы уже неоднократно пользовались; такъ, бикватерніонъ q , комплексное число a , векторную часть бикватерніона α , Sq и Vq мы писали въ видѣ $q = q_0 + \omega q_1$, $a = a_0 + \omega a_1$, $\alpha = \alpha_0 + \omega \alpha_1$, $Sq = S_0 q + \omega S_1 q$, $Vq = V_0 q + \omega V_1 q$.

24. *Параметръ и инвариантъ бикватерніона.* Параметромъ бикватерніона q —будемъ означать его черезъ Pq —мы назовемъ вещественное число, опредѣляемое формулой:

$$Pq = S \frac{q_1}{q_0} - S \frac{q_1 K q_0}{N q_0} = \frac{Sq_1 Sq_0 - SVq_1 Vq_0}{Nq_0} = \frac{w_0 w_1 - S\alpha_0 \alpha_1}{w_0^2 - \alpha_0^2}, \quad (20)$$

или
$$Pq = \frac{w_0 w_1 + x_0 x_1 + y_0 y_1 + z_0 z_1}{w_0^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}. \quad (21)$$

Отсюда имѣемъ формулы для параметровъ скалярной и векторной частей бикватерніона:

$$PSq = \frac{S_1 q}{S_0 q}, \quad \text{или} \quad Pw = \frac{w_1}{w_0}. \quad (22)$$

$$PVq = \frac{SV_0 q V_1 q}{(V_0 q)^2}, \quad \text{или} \quad P\alpha = \frac{S\alpha_0 \alpha_1}{\alpha_0^2}. \quad (23)$$

Формулы для Pw и $P\alpha$ мы можемъ рассматривать какъ частные случаи формулы (20),—первую, когда $Vq = \alpha = 0$,—вторую, когда $Sq = w = 0$. Въ первомъ случаѣ бикватерніонъ обращается въ комплексное число $w = w_0 + \omega w_1$, и мы видимъ изъ формулы (22), что опредѣление параметра бикватерніона не противорѣчитъ опредѣлению параметра комплекснаго числа w [см. § 18], а содержитъ это послѣднее какъ частный случай. Помощью формулъ (22) и (23) мы можемъ представить (20) въ видѣ:

$$Pq = \frac{w_0^2 Pw - \alpha_0^2 P\alpha}{w_0^2 - \alpha_0^2}. \quad (24)$$

Выраженіе, стоящее въ числительѣ Pq , мы будемъ называть инвариантомъ бикватерніона q . Если инвариантъ биква-

терниона равняется нулю, но главная часть, q_0 , не равна нулю, то $Pq = 0$; если главная часть бикватерниона, $q_0 = 0$, но моментъ его, $q_1 = 0$, то $Pq = \infty$.

25. *Тензоръ и верзоръ бикватерниона.* Тензоромъ бикватерниона q —будемъ означать его черезъ Tq —назовемъ комплексное число, опредѣляемое формулой:

$$Tq = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}, \quad (25)$$

гдѣ корень берется со знакомъ $+$, формулою, которая, будучи развернута по правиламъ § 18, принимаетъ видъ:

$$Tq = \sqrt{w_0^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \left(1 + \omega \frac{w_0 w_1 + x_0 x_1 + y_0 y_1 + z_0 z_1}{w_0^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \right), \quad (26)$$

или, такъ какъ $Tq_0 = \sqrt{w_0^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$,

$$Tq = T_0 q + \omega T_1 q = Tq_0 (1 + \omega Pq), \quad (27)$$

откуда $T_0 q = Tq_0$, $T_1 q = Tq_0 Pq$,

$$PTq = \frac{T_1 q}{T_0 q} = Pq. \quad (28)$$

Такимъ образомъ, тензоръ бикватерниона есть комплексное число, главная часть котораго = тензору главной части бикватерниона, а параметръ = параметру бикватерниона¹).

Изъ формулы (27) мы имѣемъ:

$$TSq = Tw = T_0 w + \omega T_1 w = Tw_0 (1 + \omega Pw) \quad (29)$$

$$TVq = Ta = T_0 a + \omega T_1 a = Ta_0 (1 + \omega Pa) \quad (30)$$

По формулѣ (25), опредѣляющей Tq , $Tw_0 = \sqrt{w_0^2}$, т. е. равняется абсолютной величинѣ w_0 , а потому изъ формулы (29) слѣдуетъ, что $Tw = w$, если главная часть числа w положительна, и $Tw = -w$, если она отрицательна.

¹) Наше опредѣленіе тензора бикватерниона не совпадаетъ съ определениемъ А. Buchheim'a (A memoir, § 2).

Замѣчая, что по формуламъ (29) и (30) $(T_0\alpha)^2 = (Ta_0)^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = -a_0^2$ и $(T_0w)^2 = (Tw_0)^2 = w_0^2$, мы можемъ формулу (24) представить въ видѣ:

$$Pq = \frac{T_0wT_1w + T_0\alpha T_1\alpha}{(T_0w)^2 + (T_0\alpha)^2} \quad (31)$$

Сравнивая ур., опредѣляющее Nq (16) съ ур. (25), мы находимъ:

$$Nq = (Tq)^2, \quad (32)$$

или, возвышая обѣ части равенства (27) въ квадратъ и замѣчая, что $(Tq_0)^2 = Nq_0$,

$$Nq = N_0q + \omega N_1q = Nq_0(1 + 2Pq), \quad (33)$$

откуда

$$PNq = 2Pq \quad (34)$$

Такимъ образомъ, норма бикватерніона есть комплексное число, главная часть которого = норма главной части бикватерніона, а параметръ = двойному параметру бикватерніона.

Верхоромъ бикватерніона q будемъ означать его черезъ Uq — мы будемъ называть бикватерніонъ, опредѣляемый формулой:

$$Uq = \frac{q}{Tq} = \frac{w + ix + jy + kz}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (35)$$

изъ которой имѣемъ $q = Tq \cdot Uq$, (36)

т. е. всякий бикватерніонъ разлагается на произведение его тензора и верхора.

26. Уголъ, поворотъ и шагъ бикватерніона. Если числа $a = a_0 + \omega a_1$ и $t = t_0 + \omega t_1$, связанны между собой уравнениемъ $a^2 + t^2 = 1$, то всегда можно подыскать такое комплексное число $\theta = \theta_0 + \omega \theta_1$, что $cs\theta = a$ и $sin\theta = t$. Дѣйствительно, эти два ур. эквивалентны четыремъ ур. [см. § 19, (8)]:

$$cs\theta_0 = a_0, -\theta_1 sin\theta_0 = a_1$$

$$sin\theta_0 = t_0, \quad \theta_1 cs\theta_0 = t_1,$$

которая вслѣдствіе условія $a^2 + t^2 = 1$, распадающагося на два: $a_0^2 + t_0^2 = 1$ и $a_0 a_1 + t_0 t_1 = 0$, совмѣстны и, слѣдовательно, допускаютъ рѣшеніе. Такъ какъ θ_0 опредѣляется по синусу и косинусу, то это рѣшеніе будетъ вполнѣ опредѣленнымъ, если мы потребуемъ, чтобы θ_0 заключалось въ предѣлахъ отъ $-\pi$ до $+\pi$.

Два комплексныхъ числа w : $Tq = a$ и $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$: $Tq = t$ очевидно удовлетворяютъ условію $a^2 + t^2 = 1$, а потому мы можемъ опредѣлить $\theta = \theta_0 + \omega\theta_1$ такъ, что

$$Tqcs\theta = w \quad (37)$$

$$Tqsn\theta = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Комплексное число θ , опредѣляемое этими формулами, мы будемъ называть угломъ бикватерніона и означать черезъ $\angle q$; его главную часть, θ_0 , называемъ поворотомъ, а моментъ θ_1 — шагомъ бикватерніона.

Чтобы ввести уголъ θ въ выраженіе бикватерніона, положимъ

$$\frac{xi + yj + zk}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \varepsilon; \quad (38)$$

тогда мы будемъ имѣть $T\varepsilon = 1$, $\varepsilon^2 = -1$ и

$$Uq = cs\theta + \varepsilon sn\theta \quad (39)$$

$$q = Tq(cs\theta + \varepsilon sn\theta) \quad (40)$$

27. *Основные формулы теоріи бикватерніоновъ.* Выраженіе (9) для бикватерніона q представляетъ его въ видѣ кватерніона, у котораго коэффиціентами служать комплексныя числа вида $a_0 + \omega a_1$. Основные операциі надъ бикватерніонами и знаки S , V , K , N , q^{-1} , T , U , $\angle q$, мы опредѣляемъ формулами (10, 11, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 25, 35, 37), которые по внѣшнему виду тождественны съ формулами, опредѣляющими соответствующія операциі и знаки въ теоріи кватерніоновъ. Все различіе между формулами теоріи кватерніоновъ и нашими заключается только въ томъ значеніи, которое мы приписываемъ буквамъ $w, x, y, z, w', x', y', z'$: въ теоріи кватерніоновъ

эти буквы означают вещественные числа, теперь же мы подъ ними должны подразумѣвать числа комплексныя вида $a_0 + \omega a_1$. Но операциі надъ этими послѣдними подчиняются, какъ это мы видѣли [см. § 18], тѣмъ же основнымъ законамъ, какъ и операциі надъ числами вещественными, а потому всѣ формулы теоріи кватерніоновъ, представляющія слѣдствія вышеуказанныхъ, всѣ формулы, въ которыхъ входятъ основные дѣйствія, знаки S, V, K, N, q^{-1}, T, U будуть имѣть мѣсто и въ томъ случаѣ, если мы подъ вещественными числами и кватерніонами будемъ подразумѣвать комплексныя числа и бикватерніоны.

Кромѣ знаковъ S, V, K, N, q^{-1}, T, U мы ввели еще знакъ P , которому нѣтъ соответствующаго въ теоріи кватерніоновъ, ибо параметръ кватерніона равенъ нулю. Поэтому въ тѣмъ формуламъ, о которыхъ мы только что говорили, мы должны, въ теоріи бикватерніоновъ присоединить еще цѣлый рядъ, въ которыхъ вышеуказанные знаки и операции комбинируются со знакомъ P . Выведемъ нѣкоторыя наиболѣе важныя изъ нихъ, доказавъ предварительно нѣкоторыя изъ формулъ теоріи кватерніоновъ.

По опредѣленію сопряженного бикватерніона [§ 22], мы имѣемъ:

$$K(qq') = S(qq') - V(qq') = ww' + Sa\alpha' - wa' - w'a - Va\alpha',$$

далѣе,

$$Kq'.Kq = (w - a')(w - \alpha) = ww' + Sa'\alpha - wa' - w'a + Va'\alpha,$$

но $Saa' = Sa'\alpha$, $Vaa' = -Va'\alpha$, слѣдовательно,

$$Kqq' = Kq'Kq, \quad (41)$$

т. е. бикватерніонъ, сопряженный съ произведеніемъ двухъ бикватерніоновъ, равняется произведенію сопряженныхъ бикватерніоновъ, взятыхъ въ обратномъ порядке.

По опредѣленію нормы [§ 22], $Nqq' = qq'K(qq')$. Отсюда по предыдущей формулы

$$Nqq' = qq'Kq'Kq' = qNq'Kq = NqNq', \quad (42)$$

т. е. норма произведенія равняется произведенію нормъ. Изъле-

кая изъ обѣихъ частей послѣднаго равенства корень квадратный, по (32) имѣемъ:

$$Tqq' = TqTq', \quad (43)$$

т. е. тензоръ произведения равняется произведению тензоровъ. Развернувъ это равенство, мы находимъ по (27):

$$T_o(qq')[1 + \omega P(qq')] = T_o q(1 + \omega Pq) T_o q'(1 + \omega Pq'),$$

откуда, сравнивая члены свободные отъ ω и коэффиціенты при ω въ обѣихъ частяхъ, получаемъ:

$$Pqq' = Pq + Pq' \quad (44)$$

т. е. параметръ произведения равняется суммѣ параметровъ. Наконецъ изъ (36) имѣемъ:

$$qq' = T(qq') U(qq') = TqUqTq'Uq' = TqTq'UqUq',$$

но $Tqq' = TqTq'$, а потому

$$Uqq' = UqUq', \quad (45)$$

т. е. верзоръ произведения равняется произведенію верзоровъ.

Изъ формулъ (42, 43, 44, 45) легко находимъ:

$$N \frac{q'}{q} = Nq:Nq, \quad (46) \quad T \frac{q'}{q} = Tq':Tq, \quad (47)$$

$$P \frac{q'}{q} = Pq' - Pq, \quad (48) \quad U \frac{q'}{q} = Uq':Uq. \quad (49)$$

Пользуясь формулой (48) и припоминая, что $q^{-1} = 1: q$, $q^{-1} = Kq:Nq, PNq = 2Pq$, мы находимъ:

$$Pq^{-1} = -Pq. \quad (50) \quad PKq = Pq \quad (51)$$

Выраженіе (40) для бикватерніона даетъ намъ $Sq = Tqcs\theta, Vq = Tqsn\theta\varepsilon$, откуда помошью формулъ (44, 28, 8), замѣчая, что изъ равенства $T\varepsilon = 1$ слѣдуетъ $P\varepsilon = 0$, мы получаемъ:

$$PSq = Pq - \theta_1 tg\theta_0 \quad (52) \quad PVq = Fq + \theta_1 ctg\theta_0, \quad (53)$$

гдѣ θ_0 есть поворотъ и θ_1 шагъ бикватерніона q . Изъ этихъ формулъ легко вывести, что Pq заключается между PSq и PVq и что шагъ бикватерніона, θ_1 , обращается въ нуль (при конечныхъ PSq и PVq) тогда и только тогда, когда $PSq=PVq$.

Изъ (35 и 47) имѣемъ: $TUq=Tq:T(Tq)$, но $T(Tq)=Tq$ [см. замѣчаніе къ (29)], а потому

$$TUq=1, \quad (54)$$

или, развернувъ первую часть,

$$T_0 Uq(1+\omega PUq)=1,$$

$$\text{откуда} \quad T_0 Uq=1, \quad PUq=0 \quad (55)$$

28. Степень и логарифмъ бикватерніона. До сихъ поръ мы не рассматривали показательной, степенной и логарифмической функций отъ бикватерніона. Теперь, на основаніи вышеизложенного, ввести понятіе объ этихъ функцияхъ уже не трудно: мы должны только въ тѣхъ формулахъ теоріи кватерніоновъ, которыя опредѣляютъ упомянутыя функции, вмѣсто кватерніона, его угла, тензора и верзоръ подразумѣвать бикватерніонъ и его уголъ, тензоръ и верзоръ, чтобы имѣть формулы, опредѣляющія соответствующія функции отъ бикватерніона. Пояснимъ сказанное примѣрами.

На страницѣ 364 „Elements of Quaternions“ Hamilton даетъ такое опредѣленіе степени α^t „произвольного вектора основанія α съ произвольнымъ скалярнымъ показателемъ t “. „Степень“ говорить Hamilton, есть, вообще говоря, кватерніонъ, который можетъ быть разложенъ на два множителя, тензоръ и верзоръ такимъ образомъ:

$$\alpha^t=T\alpha^t.U\alpha^t; \quad I.$$

причемъ $T\alpha^t$ означаетъ ариѳметическое значеніе степени t положительного числа $T\alpha$, представляющаго (какъ обыкновенно) длину линіи-основанія α ; а $U\alpha^t$ означаетъ верзоръ, который всякую линію Q перпендикулярную къ α поворачиваетъ вокругъ этой послѣдней, какъ вокругъ оси, на t прямыхъ угловъ, или квадрантовъ, въ положительному или отрицатель-

номъ направлениі, смотря по тому, будеть ли скалярный показатель t положительнымъ или отрицательнымъ числомъ". Короче говоря, $U\alpha^t$ опредѣляется формулой (I. с., VII, р. 365):

$$U\alpha^t = cs \frac{t\pi}{2} + Uasn \frac{t\pi}{2} \quad \text{VII.}$$

Совершенно такими же двумя формулами (I и VII) мы можемъ опредѣлить степень α^t , имѣющую показателемъ комплексное число $t=t_0+\omega t_1$, а основаниемъ бикватерніонъ $a=a_0+\omega a_1$, скалярная часть которого равняется нулю. При этомъ степень $T\alpha^t$ найдется по одной изъ формулъ (8) § 19, а $U\alpha^t$ будемъ представлять нѣкоторый верзоръ. Изъ формулы (I) слѣдуетъ, что всякий бикватерніонъ $q=Tq(cs\theta+esn\theta)$ можетъ быть представленъ въ видѣ $q=\alpha^t$: мы должны только определить t и α по формуламъ:

$$t = \frac{2\theta}{\pi}, \quad Tq = (Tq)^{1/t}, \quad U\alpha = \varepsilon, \quad a = Ta \cdot U\alpha.$$

Подобнымъ же образомъ логариѳмъ бикватерніона q и его степень съ показателемъ $t=t_0+\omega t_1$ могутъ быть определены двумя формулами:

$$\lg q = \lg Tq + \angle q \cdot Uq, \quad \text{III.}$$

$$\text{и} \quad q^t = (Tq)^t \cdot (cst \angle q + UVq \cdot sn \angle q). \quad \text{XXIII.}$$

гдѣ $\lg Tq$ найдется по одной изъ формулъ (8) § 19, тожественными съ тѣми, помощью которыхъ Hamilton (I. с.; III, р. 385; XXIII, р. 386) опредѣляетъ логафиѳмъ и степень кватерніона.

29. Неразвернутыя формулы теоріи бикватерніоновъ. Всѣ формулы теоріи кватерніоновъ представляютъ слѣдствія тѣхъ основныхъ, которые, какъ мы видѣли, имѣютъ мѣсто и въ теоріи бикватерніоновъ, или нѣкоторыхъ новыхъ, опредѣляющихъ новые, еще неразсмотрѣнныя нами, понятія, связанные съ кватерніономъ. Поэтому, если мы, встрѣчаясь съ новымъ понятіемъ теоріи кватерніоновъ (напр. дифференциаль функции кватерніона) и формулой, его опредѣляющей, будемъ всякий разъ вводить соответствующее понятіе въ теорію бик-

ватерніоновъ помошью той же самой формулы подобно тому, какъ это было сдѣлано въ выше данныхъ примѣрахъ относительно a^t, lqq, q^t , то тѣ формулы, которыя получатся изъ этихъ новыхъ путемъ ихъ комбинацій между собой и съ ранѣе выведенными, будутъ тождественны съ соотвѣтствующими формулами теоріи кватерніоновъ.

Итакъ, есть безъ исключений формулы теоріи кватерніоновъ представляютъ неразвернутыя формулы теоріи бикватерніоновъ.

Г л а в а III.

30. *Бивекторъ, его точка приведенія и ось.* Во второй главѣ мы рассматривали бикватерніонъ какъ комплексное число, не связывая съ нимъ никакихъ геометрическихъ представлений. Мы перейдемъ теперь къ изученію той связи, которая существуетъ между бикватерніонами съ одной стороны и бивекторами съ другой. Начнемъ съ того, что разсмотримъ геометрическое значеніе нѣкоторыхъ знаковъ, введенныхъ въ предыдущей главѣ, и перенесемъ нѣкоторыя понятія, связанныя съ бивекторами, на комплексные числа вышерассмотрѣнного типа.

Возьмемъ нѣкоторую опредѣленную точку O за начало прямоугольной системы координатъ и будемъ комплексное число:

$$\gamma = li + mj + nk$$

изображать векторомъ, назовемъ его γ , котораго начало находится въ точкѣ O и проекціи суть l, m, n ; комплексное же число:

$$\alpha = \alpha_0 + \omega \alpha_1 = pi + qj + rk + \omega(ai + bj + ck) \quad (1)$$

будемъ изображать бивекторомъ, назовемъ его α , для котораго точка O служить точкой приведенія и величины p, q, r, a, b, c Plücker'овыми координатами. Комплексное число (1) мы называемъ также бивекторомъ и точку O его точкой приведенія.

Если мы за точку приведенія бивектора α возьмемъ точку O' , которая находится въ концѣ вектора γ , и проведемъ черезъ нее оси соответственно параллельныя старымъ осямъ, то бивекторъ α относительно новой системы координатъ будеть опредѣляться комплекснымъ числомъ:

$$p'i + q'j + r'k + \omega(a'i + b'j + c'k),$$

гдѣ p', q', r', a', b', c' связаны со старыми координатами бивектора α формулами (4) § 2, пользуясь которыми мы можемъ представить это число въ видѣ:

$$\begin{aligned} & pi + qj + rk + \\ & + \omega[(ai + bj + rk) + (qn - rm)i + (rl - pn)j + (pm - ql)k] \\ \text{или} \quad & \alpha_0 + \omega(\alpha_1 + V\alpha_0\gamma). \end{aligned}$$

Оба числа $\alpha_0 + \omega\alpha_1$ и $\alpha_0 + \omega(\alpha_1 + V\alpha_0\gamma)$ опредѣляютъ одинъ и тотъ же бивекторъ α , а потому оба мы можемъ назначить одной и той же буквой α , помня, что для первого точкой приведенія служитъ точка O , а для втораго—точка O' . Такимъ образомъ

$$\alpha = \alpha_0 + \omega\alpha_1, \quad \text{точка приведенія } O, \quad (2)$$

$$\alpha = \alpha_0 + \omega(\alpha_1 + V\alpha_0\gamma), \quad \text{точка приведенія } O'. [OO' = \gamma]$$

Ось бивектора α мы назовемъ осью комплекснаго числа (1), опредѣляющаго бивекторъ. Ось $\alpha = \alpha_0 + \omega\alpha_1$, какъ мы знаемъ [см. § 1], параллельна вектору α_0 и проходитъ черезъ точку $(x_0y_0z_0)$ [см. формулы (2) § 1], т. е. черезъ конецъ вектора

$$\chi = x_0i + y_0j + z_0k = \frac{1}{\alpha_0}[(rb - qc)i + (pc - ra)j + (qa - pb)k]$$

$$\text{или} \quad \chi = \frac{V\alpha_1\alpha_0}{\alpha_0^2} = V \frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \quad (3)$$

который, какъ легко видѣть, перпендикуляренъ къ оси бивектора (ибо $V\alpha_1\alpha_0$ перпендикуляренъ къ каждому изъ множителей) и представляетъ, слѣдовательно, перпендикуляръ, опущенный изъ точки приведенія на ось бивектора.

31. *Тензоръ и параметръ бивектора.* Параметръ бивектора α мы опредѣлили формулой (1) § 1, которая можетъ быть представлена въ видѣ:

$$P\alpha = \frac{S\alpha_1\alpha_0}{\alpha_0^2} = S \frac{\alpha_1}{\alpha_0}. \quad (4)$$

Эта формула тождественна съ [(23) § 24] и, слѣдовательно, параметръ бивектора α =параметру комплекснаго числа, опредѣляющаго бивекторъ.

Замѣтимъ, что мы можемъ соединить формулы (3) и (4) въ одну:

$$P\alpha + \chi = \alpha_1/\alpha_0. \quad (5)$$

Такъ какъ по формулѣ [(25) § 25], $T\alpha_0 = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ есть длина вектора α_0 , то формулу [(30), § 25]:

$$Ta = Ta_0(1 + \omega P\alpha)$$

мы можемъ прочитать такъ: *тензоръ бивектора есть комплексное число, главная часть котораго=длинѣ главнаго вектора бивектора, а параметръ=параметру бивектора.*

Припоминая (§ 3), что произведеніе $Ta_0.P\alpha$ есть длина момента бивектора α , когда точка приведенія находится на его оси, взятая со знакомъ +, если моментъ и главный векторъ однаково направлены, и со знакомъ — въ противномъ случаѣ, мы можемъ также сказать, что тензоръ бивектора есть комплексное число $R + \omega G$, главная часть котораго, R =длинѣ главнаго вектора, а моментъ G =длинѣ момента бивектора для точки приведенія на оси его, длины, взятой съ надлежащимъ знакомъ. Въ частномъ случаѣ, когда бивекторъ α будетъ параметра нуль, $Ta = Ta_0 = R$, когда параметръ бивектора равенъ бесконечности, $Ta = \omega Ta_1 = \omega G$.

32. *Бикватерніонъ, его ось и точка приведенія.* Всякій бикватерніонъ q мы можемъ представить въ видѣ:

$$q = w + \alpha = w_0 + \omega w_1 + \alpha_0 + \omega \alpha_1$$

Если мы возьмемъ какую нибудь точку O за точку приведенія, то векторная часть бикватерніона, α , будетъ опредѣ-

лять нѣкоторый бивекторъ α и, слѣдовательно, бикватерніонъ q опредѣляетъ нѣкоторую совокупность числа w и бивектора α и выражается ихъ суммой. Точку приведенія O и ось бивектора α мы будемъ называть точкой приведенія и осью бикватерніона q . Если мы примемъ за точку приведенія точку $O'(OO'=\gamma)$, то $\alpha=a_0+\omega(\alpha_1+Va_0\gamma)$ и бикватерніонъ $q'=w+a_0+\omega(\alpha_1+Va_0\gamma)$ будетъ опредѣлять совокупность того же числа w и того же бивектора α , отнесенного къ новой точкѣ приведенія. Поэтому мы можемъ считать бикватерніоны q и q' однимъ и тѣмъ же бикватерніономъ q : онъ принимаетъ видъ

$$q=w_0+\omega w_1+a_0+\omega a_1, \quad (6)$$

когда точкой приведенія служить точка O , и видъ

$$q=w_0+\omega w_1+a_0+\omega(\alpha_1+Va_0\gamma), \quad (7)$$

когда точкой приведенія служить точка O' .

33. Умноженіе. Умноженіе бивектора на комплексное число $a=a_0+\omega a_1$. Прежде чѣмъ приступить къ изслѣдованию геометрическихъ свойствъ операций умноженія двухъ бивекторовъ, разсмотримъ подробнѣе операцию умноженія бивектора $\alpha=a_0+\omega a_1$ на комплексное число $a=a_0+\omega a_1$. Перемножая α и a , мы получаемъ бивекторъ:

$$\alpha a=a_0\alpha_0+\omega(a_0\alpha_1+a_1\alpha_0).$$

Его главный векторъ $=a_0\alpha_0$, его параметръ опредѣлится формулой (4):

$$Pa\alpha=\frac{Sa_0\alpha_0(a_0\alpha_1+a_1\alpha_0)}{a_0^2\alpha_0^2}=\frac{a_0^2Sa_0\alpha_1+a_0a_1Sa_0^2}{a_0^2\alpha_0^2},$$

или, такъ какъ $Sa_0^2=\alpha_0^2$,

$$Pa\alpha=\frac{Sa_0\alpha_1}{\alpha_0^2}+\frac{a_1}{a_0}=Pa+Pa.$$

Послѣдняя формула получается также прямо изъ формулы [(44) § 27], полагая въ ней $q=a$ и $q'=a$. Что касается

до оси $a\alpha$, то она параллельна $a_0\alpha_0$, а следовательно, и оси бивектора α и проходит через точку, находящуюся въ концѣ вектора

$$\chi = \frac{V(a_0\alpha_1 + a_1\alpha_0)a_0\alpha_0}{a_0^2\alpha_0^2} = \frac{a_0^2 V\alpha_1\alpha_0 + a_0 a_1 V\alpha_0^2}{a_0^2\alpha_0^2}. \quad [\text{см. форм. (3)}]$$

Но α_0^2 есть скалярное число, $V\alpha_0^2 = 0$ и $\chi = V\alpha_1\alpha_0 : a_0^2$, т. е. χ тотъ же векторъ, который опредѣляетъ и положеніе оси α [см. форм. (3)]. Оси бивекторовъ α и $a\alpha$, какъ параллельны, проходящія черезъ одну точку, совпадаютъ.

Итакъ бивекторы α и $a\alpha$ имѣютъ общую ось, главная часть $a\alpha$ —произведенію главныхъ частей, a_0 и α_0 , параметръ $a\alpha$ —сумму параметровъ множителей, $Ra + Ra$.

Изъ этой теоремы и предыдущихъ формулъ вытекаютъ такія слѣдствія:

I. Самый общий видъ бивектора, который по § 15 мы можемъ назвать произведеніемъ бивектора α на число s , есть $(v + \omega v_1)sa$.

II. Такъ какъ дѣленіе есть дѣйствіе обратное умноженію, то оси бивекторовъ α и $\alpha:a$ совпадаютъ, главна часть $\alpha:a$ —частному отъ дѣленія главныхъ частей, $\alpha_0:a_0$, а параметръ $\alpha:a$ —разности параметровъ дѣлимааго и дѣлителя, $Ra - Ra$.

III. Изъ формулы $Ua = a:Ta$ слѣдуетъ, что Ua есть винтъ параметра нуль, имѣющій общую ось съ a . Всякий бивекторъ α —произведенію его тензора на винтъ параметра нуль, имѣющій съ нимъ общую ось, $\alpha = Ta \cdot Ua$.

IV. Бивекторъ сопряженный съ α , $K\alpha = -a$, имѣть съ α общую ось, одинаковый параметръ и одинаковый по длини главный векторъ и отличается отъ α только направлениемъ оси.

V. Ось бивектора, обратного данному, $1:\alpha = -a:N\alpha$, совпадая съ осью α , отличается отъ нея направлениемъ; параметръ обратного бивектора $= -Ra$, а длина его главного вектора—величинѣ обратной къ длини главного вектора α, α_0 .

VI. Оси бикватерніоновъ $q = w + \alpha$ и $aq = aw + a\alpha$ совпадаютъ, ибо осью первого служить ось бивектора α , а втораго совпадающая съ ней ось бивектора $a\alpha$.

VII. Бикватерніонъ q и его верзоръ Uq имѣютъ общую ось.

34. Умножение бивектора на бивекторы. Общие формулы.
Пусть мы имеемъ два бивектора:

$$\alpha = \alpha_0 + \omega \alpha_1 = pi + qj + rk + \omega(ai + bj + ck)$$

$$\beta = \beta_0 + \omega \beta_1 = p_1 i + q_1 j + r_1 k + \omega(a_1 i + b_1 j + c_1 k),$$

или $\alpha = xi + yj + zk$

$$\beta = x'i + y'j + z'k,$$

гдѣ $x = p + \omega a, y = q + \omega b, z = r + \omega c$

$$x' = p_1 + \omega a_1, y' = q_1 + \omega b_1, z' = r_1 + \omega c_1,$$

Перемножая ихъ, мы имеемъ:

$$\alpha\beta = Sa\beta + V\alpha\beta \quad (8)$$

$$\alpha\beta = -(xx' + yy' + zz') + (yz' - y'z)i + (zx' - z'x)j + (xy' - x'y)k \quad (9)$$

$$\alpha\beta = \alpha_0\beta_0 + \omega(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0) \quad (10)$$

$$\alpha\beta = q_0 + \omega q_1, \quad (11)$$

гдѣ $q_0 = -(pp_1 + qq_1 + rr_1) + Pi + Qj + Rk \quad (12)$

$$q_1 = -(pa_1 + qb_1 + rc_1 + p_1a + q_1b + r_1c) + Ai + Bj + Ck \quad (13)$$

и P, Q, R, A, B, C опредѣляются формулами [(8) § 14].

35. Скалярное произведение. Основные формулы. Скалярное произведение мы можемъ представить въ различныхъ формахъ:

$$Sa\beta = -(xx' + yy' + zz') \quad (14)$$

$$Sa\beta = Sa_0\beta_0 + \omega S(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0) \quad (15)$$

$$Sa\beta = -(pp_1 + qq_1 + rr_1) - \omega(pa_1 + qb_1 + rc_1 + p_1a + q_1b + r_1c), \quad (16)$$

откуда $S_0\alpha\beta = Sa_0\beta_0 = -(pp_1 + qq_1 + rr_1) \quad (17)$

$$S_1\alpha\beta = Sa_0\beta_1 + Sa_1\beta_0 = -(pa_1 + qb_1 + rc_1 + p_1a + q_1b + r_1c) \quad (18)$$

Изъ формулы (16) мы видимъ, что $Sa\beta$ есть комплексное число, главная часть котого=геометрическому произве-

денію главныхъ векторовъ, взятому со знакомъ —, а моментъ
=относительному моменту бивекторовъ также со знакомъ—.

Если мы умножимъ $S_{\alpha\beta}$ на число $k + \omega k_1$, то въ произведеніи коэффициентомъ при ω будетъ функция $\varphi(x,y)$ [см. § 9], которая представляетъ самый общій видъ функций, удовлетворяющей условіямъ *A* и *B* [см. §§ 6 и 7].

36. Комплексный угол между двумя прямыми въ пространствѣ. Мы дадимъ еще одно выражение для $S_{\alpha\beta}$, введя въ него уголъ φ и кратчайшее разстояніе d между осями α и β , причемъ условимся углу и кратчайшему разстоянію между двумя прямыми въ пространствѣ приписывать определенный знакъ, руководясь однимъ изъ слѣдующихъ правилъ.

a. Пусть мы имѣемъ двѣ прямые α и β , которымъ мы приписываемъ определенное направление. Проведемъ линію кратчайшаго разстоянія между ними, пересѣкающую ихъ въ точкахъ O_α и O_β соответственно и представимъ себѣ наблюдателя, который стоитъ въ одной изъ точекъ O_α , или O_β , напр. въ O_α , и, прислонившись спиной къ α такъ, что направление α идетъ отъ его ногъ къ головѣ, смотрить вдоль прямой $O_\alpha O_\beta$. Тогда, если для наблюдателя направление β будетъ идти справа налево, мы будемъ считать уголъ между α и β положительнымъ, а если слѣва направо—отрицательнымъ. Легко видѣть, что наблюдатель нашелъ бы для угла тотъ же знакъ, если бы онъ прислонился къ β и опредѣлилъ бы знакъ по направлению α . Опредѣляя по этому правилу знакъ угла между α и β , кратчайшее разстояніе между ними будемъ всегда считать положительнымъ.

b. Припишемъ линію $O_\alpha O_\beta$, которую означимъ черезъ ϵ , одно изъ возможныхъ для нея направлений, напримѣръ будемъ считать ее направленіемъ отъ O_α къ O_β . Представимъ себѣ наблюдателя, прислонившагося спиной къ ϵ такъ, чтобы направление ϵ шло отъ его ногъ къ головѣ; тогда уголъ между α и β мы будемъ считать положительнымъ, если наблюдатель, смотря по положительному направлению первой прямой, т. е. α , видѣтъ направление β идущимъ слѣва направо и отрицательнымъ—въ противномъ случаѣ. Понятно, что уголъ между β и α будетъ— φ , если уголъ между α и β есть φ . Кратчайшее разстояніе между α и β мы считаемъ положительнымъ, когда направление отъ точки пресѣченія ϵ съ первымъ бивекторомъ, O_α , въ точкѣ пересѣченія со вторымъ, O_β , совпадаетъ,

и отрицательнымъ, когда оно противоположно направлению ε . Если d есть кратчайшее разстояніе между α и β , то $-d$ будеть кратчайшимъ разстояніемъ между β и α . Если мы измѣнимъ направление ε на прямо противоположное, то знаки угла и кратчайшаго разстоянія между α и β измѣнятся и потому знаки, опредѣленные по второму правилу, мы будемъ называть знаками относительно направлениія ε .

Опредѣливъ знаки φ и d по тому или другому правилу, мы будемъ называть комплексное число $\theta = \varphi + \omega d$ комплекснымъ угломъ между α и β . Если знаки φ и d опредѣлены по второму правилу, то θ будеть комплекснымъ угломъ между α и β относительно направлениія ε . Комплексный уголъ между β и α относительно того же направлениія будетъ $= -\theta$, и уголъ между α и β относительно направлениія противоположнаго ε также $= -\theta$.

По формуламъ [(8) § 19] мы имѣемъ:

$$\begin{aligned} cs\theta &= csp - \omega dsnp & Pcs\theta &= -dtg\varphi \\ sn\theta &= snp + \omega dcsp & Psn\theta &= dtg\varphi \end{aligned} \quad (19)$$

Отсюда заключаемъ:

I. $cs\theta = 0$ только тогда, когда прямые α и β пересѣкаются между собой подъ прямымъ угломъ ($\varphi = \frac{1}{2}\pi, d = 0$); $Pcs\theta = \infty$, когда прямые не пересѣкаются, но направлениія ихъ взаимно перпендикулярны.

II. $sn\theta = 0$ только тогда, когда прямые α и β совпадаютъ, причемъ безразлично, имѣютъ ли онѣ одинаковое направлениіе ($\varphi = 0, d = 0$) или прямо противоположное ($\varphi = \pi, d = 0$); $Psn\theta = \infty$, если прямые параллельны, но не совпадаютъ.

37. Формула $S\alpha\beta = -T\alpha T\beta cs\theta$. Пусть $\theta = \varphi + \omega d$ есть комплексный уголъ между осями бивекторовъ α и β . Введемъ его въ выражение $S\alpha\beta$. Такъ какъ длины главныхъ векторовъ α_0 и β_0 суть $T\alpha_0$ и $T\beta_0$, и уголъ между α_0 и β_0 есть φ , то для выражений (17) и (18), мы имѣемъ:

$$S_0\alpha\beta = S\alpha_0\beta_0 = -T\alpha_0 T\beta_0 csp \quad (20)$$

$$S_1\alpha\beta = S(\alpha_1\beta_0 + \alpha_0\beta_1) = -T\alpha_0 T\beta_0 [(P\alpha + P\beta) csp - dsnp] \quad (21)$$

Первая изъ этихъ формулъ есть извѣстная формула теоріи кватерніоновъ, а вторая—основная формула теоріи винтовъ. Пользуясь ими, мы можемъ представить $S\alpha\beta$ въ видѣ:

$$S\alpha\beta = -T\alpha_0 T\beta_0 (cs\varphi + \omega[(P\alpha + P\beta)cs\varphi - dsn\varphi]) \quad (22)$$

Но легко видѣть, что выраженіе въ скобкахъ разлагается на произведеніе трехъ множителей:

$$S\alpha\beta = -T\alpha_0 T\beta_0 (1 + \omega P\alpha)(1 + \omega P\beta)(cs\varphi - \omega dsn\varphi). \quad (23)$$

Слѣдовательно, замѣчая, что $T\alpha = T\alpha_0(1 + \omega P\alpha)$, $T\beta = T\beta_0(1 + P\beta)$, $cs\theta = cs\varphi - \omega dsn\varphi$, мы получаемъ:

$$S\alpha\beta = -T\alpha T\beta cs\theta, \quad (24)$$

формулу весьма важную и вполнѣ тождественную по виду съ извѣстной формулой теоріи кватерніоновъ. Развертывая ее и идя обратнымъ путемъ, получаемъ изъ нея (20) и (21).

Изъ (22) мы имѣемъ формулу:

$$PS\alpha\beta = P\alpha + P\beta - dtg\varphi, \quad (25)$$

которая также выводится прямо изъ равенства (24), если мы возьмемъ параметры отъ обѣихъ частей его и припомнимъ, что параметръ произведенія=суммъ параметровъ множителей [(44) § 27], что $PT = P$ [(28) § 25] и что $Pcs\theta = -dtg\varphi$ [(19) § 36].

38. Случаи, когда $S\alpha\beta = 0$. Разсмотримъ, когда $S\alpha\beta$, или одинъ изъ его членовъ обращается въ нуль.

Изъ (20) видно, что главная часть $S\alpha\beta$ обращается въ нуль 1) когда оси бивекторовъ взаимно перпендикулярны и 2) когда параметръ одного изъ бивекторовъ= ∞ ($T\alpha_0$, или $T\beta_0$ равны безконечности).

Моментъ $S\alpha\beta$ обращается въ нуль, когда бивекторы α и β взаимны.

Припоминая, что произведеніе двухъ, или нѣсколькихъ комплексныхъ чиселъ вида $a_0 + \omega a$, обращается въ нуль только тогда, когда хотя одинъ изъ множителей равенъ нулю, или параметры двухъ множителей равны безконечности [§ 18, I],

изъ формулы (24) видимъ, что $S\alpha\beta=0$ въ слѣдующихъ случаѣхъ.

1) если $cs\theta=0$, т. е. если оси бивекторовъ α и β пересѣкаются подъ прямымъ угломъ. 2) если $PT\alpha=P\alpha=\infty$ (или $P\beta=\infty$) и $Pcs\theta=-dtg\varphi=\infty$, т. е. если параметръ одного изъ бивекторовъ $=\infty$ и направлениа ихъ осей взаимно перпендикулярны. Такъ какъ $P\alpha=\infty$ и $\alpha_0=0$, то направление оси α будетъ опредѣляться векторомъ α_1 , положеніе же ея будетъ неопределенымъ; мы можемъ поѣтому считать, что она пересѣкаетъ ось β и такимъ образомъ можемъ разсматривать второй случай какъ частный случай первого. 3) если $T\alpha=0$ (или $T\beta=0$), т. е. если одинъ изъ множителей α , или β обращается въ нуль. 4) если $PT\alpha=P\alpha=\infty$ и $PT\beta=P\beta=\infty$.

Изъ $S\alpha\beta=0$ 1) если оси бивекторовъ α и β пересѣкаются подъ прямымъ угломъ, 2) если параметры обоихъ бивекторовъ безконечно велики и 3) если хотя одинъ изъ бивекторовъ α , или β исчезаетъ.

39. *Векторное произведение бивекторов. Основные формулы.* Изъ формулъ (9), (10) и (11) мы находимъ:

$$Va\beta=(yz'-y'z)i+(zx'-z'x)j+(xy'-x'y)k \quad (26)$$

$$Va\beta=V\alpha_0\beta_0+\omega V(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0) \quad (27)$$

$$Va\beta=Pi+Qj+Rk+\omega(Ai+Bj+Ck) \quad (28)$$

гдѣ P, Q, R, A, B, C опредѣляются формулами [(8) § 14].

Если мы умножимъ бивекторъ $Va\beta$ на число $v+\omega v_1$, то получимъ бивекторъ съ координатами $vP, vQ, vR, vA+v_1P, vB+v_1Q, vC+v_1R$; слѣдовательно, самый общий видъ бивектора, удовлетворяющаго условіямъ A и B § 6, есть произведение бивектора $Va\beta$ на число $v+\omega v_1$, $(v+\omega v_1)Va\beta$ [см. § 14].

40. *Тензоръ и параметръ $Va\beta$.* Опредѣляя тензоръ и параметръ $Va\beta$, мы разсмотримъ два случая I, когда $V\alpha_0\beta_0=0$ и II, когда $Va\beta=0$.

I. $V\alpha_0\beta_0=0$.

Если $V\alpha_0\beta_0=0$, то $\alpha_0=0, \beta_0=0$ и $\alpha_0=a_0\beta_0$, гдѣ a_0 вещественное число: оси бивекторовъ α и β не параллельны и параметры ихъ, равно какъ и параметръ $Va\beta$, конечны. По

формуламъ [(25) § 25] и (26) мы имѣемъ:

$$TV\alpha\beta = \sqrt{(yz' - y'z)^2 + (zx' - z'x)^2 + (xy' - x'y)^2}, \quad (29)$$

или

$$TV\alpha\beta = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - (xx' + yy' + zz')^2},$$

откуда по [(25) § 25], [(14) § 35] и [(24) § 37], получаемъ:

$$TV\alpha\beta = TaT\beta sn\theta, \quad (30)$$

формулу тожественную съ формулой теоріи кватерніоновъ. Замѣня во второй части $T\alpha$ и $T\beta$ по [(30) § 25] и $sn\theta$ по [(19) § 36] и развертывая ее, находимъ:

$$TV\alpha\beta = T\alpha_0 T\beta_0 (sn\varphi + \omega[(Pa + P\beta)sn\varphi + dcs\varphi]), \quad (31)$$

откуда

$$T_0 V\alpha\beta = T\alpha_0 T\beta_0 sn\varphi \quad (32)$$

$$PV\alpha\beta = Pa + P\beta + dctg\varphi, \quad (33)$$

т. е. главная часть $TV\alpha\beta$ (длина главного вектора $V\alpha\beta$) = площади параллелограмма, построеннаю на главныхъ векторахъ α и β , а $PV\alpha\beta$ = суммъ параметровъ множителей, сложенной съ произведениемъ кратчайшаго разстоянія между осами α и β на котангенсъ угла между ними.

Формула (33) легко получается прямо изъ (30), если мы припомнимъ, что параметръ произведенія = суммъ параметровъ множителей, что $PT = P$ и $Psn\theta = dctg\varphi$.

II. $V\alpha_0\beta_0 = 0$.

Когда $V\alpha_0\beta_0 = 0$, то подкоренное число въ (29) обращается въ нуль и относительно справедливости формулъ (30) и (31) можетъ возникнуть сомнѣніе. Мы покажемъ теперь, что эти формулы, каковы бы ни были бивекторы α и β , всегда имѣютъ мѣсто, причемъ, желая ими пользоваться и въ тѣхъ случаяхъ, когда параметры бивекторовъ безконечно велики, мы должны помнить, что для бивектора α безконечно большаго параметра $T\alpha_0 = 0$, $Pa = \infty$, произведеніе $T\alpha_0 \cdot Pa$, вообще говоря, конечно и равняется длинѣ момента α_1 , и $T\alpha = \omega T\alpha_1$ [см. §§ 3 и 31].

$V\alpha_0\beta_0 = 0$ въ слѣдующихъ случаяхъ.

a. Если $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 \neq 0$, но $\beta_0 = a_0\alpha_0$, гдѣ a есть вещественное число, т. е. если параметры α и β конечны и оси ихъ параллельны (или совпадаютъ).

b. Если $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 \neq 0$, т. е. если параметръ одного изъ бивекторовъ $= \infty$.

c. Если $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 0$, т. е. если оба бивектора имѣютъ безконечно большой параметръ.

Рассмотримъ какой видъ имѣеть $TV\alpha\beta$ въ этихъ случаяхъ.

a. Въ первомъ случаѣ $V\alpha\beta = \omega(V\alpha_0\beta_1 + V\alpha_1\beta_0)$ въ силу равенствъ $\beta_0 = a_0\alpha_0$ и $V\beta_0\beta_1 = -V\beta_1\beta_0$ можетъ быть представленъ въ видѣ:

$$V\alpha\beta = -\omega a_0\alpha_0^3 (V\beta_1\beta_0/B_0^2 - V\alpha_1\alpha_0/B_0^2)$$

Векторы $V\beta_0\beta_1\beta_0^3$ и $V\alpha_1\alpha_0\alpha_0^3$ суть перпендикуляры, опущенные изъ точки приведенія на оси α и β [см. (3) § 30], а разность ихъ, вслѣдствіе параллельности осей α и β , есть векторъ параллельный плоскости осей и перпендикулярный къ ихъ общему направлению. Длина его равняется разстоянію между осями α и β , и слѣдовательно

$$TV\alpha\beta = \omega T\alpha_0 T\beta_0 d.$$

b. Во второмъ случаѣ $V\alpha\beta = \omega V\alpha_1\beta_0$, и слѣдовательно

$$TV\alpha\beta = \omega T\alpha_1 T\beta_0 s n \varphi$$

c. Въ третьемъ случаѣ $V\alpha\beta = 0$ и $TV\alpha\beta = 0$.

Такіе же результаты даетъ и формула (31) или (30), если мы положимъ въ ней въ первомъ случаѣ $\theta = \omega d(\varphi = 0)$, во второмъ $T\alpha_0 = 0$, $T\alpha = \omega T\alpha_0$, $P\alpha = \omega T\alpha_1$, и въ третьемъ $T\alpha_0 = T\beta_0 = 0$. Итакъ формула (30) или (31) есть формула общая.

41. Случаи, когда $PV\alpha\beta = \infty$, или $V\alpha\beta = 0$. Бивекторъ и его тензоръ одновременно обращаются въ нуль и одновременно имѣютъ безконечно большой параметръ. Поэтому, если мы припомнимъ условія, при которыхъ произведение нѣсколькихъ комплексныхъ чиселъ имѣть безконечно большой па-

метръ, или обращается въ нуль [см. § 18, I и II], то изъ формулы (30) легко найдемъ тѣ случаи, когда $PV\alpha\beta=\infty$, или $V\alpha\beta=0$.

$PV\alpha\beta=\infty$, 1) когда $P\alpha=\infty$, но $P\beta=\infty$ и $Psn\theta=\infty$, т. е. когда оси бивекторовъ α и β не параллельны и параметръ одного изъ нихъ безконечно великъ, 2) когда $P\alpha$ и $P\beta$ конечны и $Psn\theta=\infty$, т. е. когда оси бивекторовъ параллельны (не совпадаютъ) и параметры ихъ конечны.

$V\alpha\beta=0$, 1) если $T\alpha=0$ (или $T\beta=0$), т. е. если одинъ изъ множитель α , или β обращается въ нуль. 2) если $sn\theta=0$, т. е. если оси α и β совпадаютъ. 3) если $P\alpha=\infty$ и $Psn\theta=\infty$, т. е. если параметръ α безконечно великъ и оси α и β параллельны. Ось бивектора α определена только по направлению, положение же ея можетъ быть какое угодно, и мы можемъ считать ее совпадающею съ осью β и, такимъ образомъ, рассматривать случай третій какъ частный случай предыдущаго. 4) если $P\alpha=P\beta=\infty$. Итакъ

$V\alpha\beta=0$, 1) когда оси бивекторовъ α и β совпадаютъ, 2) когда параметры ихъ безконечно велики и въ 3) когда хотя одинъ изъ бивекторовъ α , или β исчезаетъ.

Сопоставляя эту теорему съ теоремой § 38, мы видимъ, что $\alpha\beta=0$, 1) когда хотя одинъ изъ множителей=0 и 2) когда $P\alpha=P\beta=\infty$.

42. Ось $V\alpha\beta$.

Ось бивектора $V\alpha\beta$ идетъ по линіи кратчайшаго разстоянія между осями α и β .

При доказательствѣ этой теорѣмы мы разсмотримъ два случая I, когда $V\alpha_0\beta_0=0$ и II, когда $V\alpha_0\beta_0=0$.

I. Чтобы доказать теорему въ первомъ случаѣ, мы воспользуемся равенствами $S\alpha V\alpha\beta=S\beta V\alpha\beta=0$, которые имѣютъ мѣсто каковы бы ни были бивекторы α и β и легко выводятся изъ [(26) § 39] и [(14) § 35], если въ послѣдней замѣнимъ сначала β , а потомъ α черезъ $V\alpha\beta$. Такъ какъ параметры α, β и $V\alpha\beta$ конечны, то эти равенства означаютъ [см. § 38], что ось $V\alpha\beta$ пересекаетъ какъ ось α , такъ и ось β подъ прямымъ угломъ, иначе говоря, что ось $V\alpha\beta$ идетъ по линіи кратчайшаго разстоянія между осями α и β .

II. $V\alpha_0\beta_0=0$, какъ видѣли въ § 40, въ трехъ случаяхъ. Эти случаи мы разсмотримъ отдельно.

a. $\alpha_0 \neq 0, \beta_0 \neq 0, \beta_0 = a_0 \alpha_0$. Оси α и β параллельны, или совпадают. Если оси параллельны, то существует ∞^1 линий кратчайшихъ разстояній между ними, совокупность которыхъ образуетъ пучекъ параллельныхъ прямыхъ, лежащихъ въ плоскости осей α и β и къ нимъ перпендикулярныхъ. Параметръ $V_{\alpha\beta}$ безконечно великъ [см. § 40] и направление его оси будетъ опредѣляться векторомъ $V_{\beta_0\beta_0:\beta_0} = V_{\alpha_0\alpha_0:\alpha_0}$ [см. § 40], который параллеленъ линіямъ кратчайшихъ разстояній между осями α и β . Такъ какъ положение оси $V_{\alpha\beta}$ неопределено, то мы можемъ считать ее совпадающею съ любой изъ этихъ линій и, слѣдовательно, считать теорему справедливою и въ этомъ случаѣ. Если оси α и β совпадаютъ, то всякую прямую, пересѣкающую общую ось подъ прямымъ угломъ, мы можемъ рассматривать какъ линію кратчайшаго разстоянія между осями α и β ; такихъ линій существуетъ ∞^1 . Въ этомъ случаѣ $V_{\alpha\beta}=0$ [см. § 41] и рѣчи объ положеніи оси $V_{\alpha\beta}$ быть не можетъ.

b. $\alpha_0 \neq 0, \beta_0 \neq 0$. Такъ какъ для оси α будетъ опредѣлено только направление, совпадающее съ направлениемъ вектора α_1 , то всякую прямую перпендикулярную къ направлению α_1 и пересѣкающую подъ прямымъ угломъ ось β , мы можемъ считать линіей кратчайшаго разстоянія. Эти линіи образуютъ пучекъ параллельныхъ прямыхъ. Ось $V_{\alpha\beta}=\omega V_{\alpha_0\beta_0}$ будетъ параллельна вектору $V_{\alpha_0\beta_0}$, который перпендикуляренъ къ векторамъ α_1 и β_0 и, слѣдовательно, параллеленъ съ линіями кратчайшихъ разстояній. Съ любой изъ этихъ линій мы можемъ совмѣстить ось $V_{\alpha\beta}$, ибо положение оси бивектора $V_{\alpha\beta}$ неопределено.

c. $\alpha_0=0, \beta_0=0$. Определены только направления осей α и β . Линіи кратчайшаго разстоянія, будучи перпендикулярны къ направлениямъ осей, не имѣютъ определенного положенія и образуютъ связку параллельныхъ прямыхъ. Въ этомъ случаѣ $V_{\alpha\beta}=0$ и мы не можемъ говорить объ положеніи оси $V_{\alpha\beta}$.

Итакъ теорема доказана.

Что касается до направлений оси бивектора $V_{\alpha\beta}$, то оно опредѣляется векторомъ $V_{\alpha_0\beta_0}$; легко видѣть, что относительно этого направлениа уголъ между осями α и β будетъ положительнымъ.

Сопоставляя теорему этого параграфа съ изслѣдованіями предыдущаго, мы приходимъ еще къ такой теоремѣ.

Если есть только одна линія кратчайшаго разстоянія между осьми бивекторовъ α и β , то $PV\alpha\beta$ конечен; если для линіи кратчайшаго разстоянія существуетъ ∞^1 положеній, $PV\alpha\beta=\infty$; наконецъ, если для нея существуетъ ∞^3 , или болле, положеній, то $V\alpha\beta=0$.

43. *Формула $V\alpha\beta=T\alpha T\beta s n \theta \epsilon$.* Разложивъ $V\alpha\beta$ на произведение $T\bar{V}\alpha\beta$. $UV\alpha\beta$ [см. § 33, III], замѣнимъ $T\bar{V}\alpha\beta$ по формулы (30) и означимъ для кратности винтъ параметра нуль, $UV\alpha\beta$, черезъ ϵ ($T\epsilon=1$); тогда мы будемъ имѣть $V\alpha\beta=T\alpha T\beta s n \theta \epsilon$.

Ось ϵ идетъ по линіи кратчайшаго разстоянія между осьми α и β и имѣеть такое направление, относительно котораго уголъ φ между осьми α и β положителенъ. Если ϵ' есть винтъ параметра нуль, у котораго ось совпадаетъ съ осью ϵ , но имѣеть прямо противоположное направление, то $\epsilon'=-\epsilon$, и уголъ θ' между осьми α и β относительно направлениія ϵ' равенъ $-\theta$. Слѣдовательно, мы можемъ $V\alpha\beta$ представить также въ видѣ $V\alpha\beta=T\alpha T\beta s n \theta' \epsilon'$. Итакъ мы можемъ резюмировать всѣ результаты §§ 40—42 слѣдующимъ образомъ.

Векторное произведение бивектора β на бивекторъ α мы всегда можемъ представить въ видѣ:

$$V\alpha\beta=T\alpha T\beta s n \theta \epsilon, \quad (34)$$

гдѣ ϵ есть винтъ параметра нуль ($T\epsilon=1$), у котораго осью служитъ линія кратчайшаго разстоянія между осьми множителя α и множимаго β , и θ —комплексный уголъ между ними относительно положительного направлениія оси ϵ .

Пользуясь формулами (8, 24, 34), мы имѣемъ:

$$\alpha\beta=T\alpha T\beta(-c s \theta + \epsilon s n \theta), \quad (35)$$

формулу тожественную съ формулой теоріи кватерніановъ для произведения двухъ векторовъ.

44. *Дѣленіе. Путь Clifford-Hamilton'a.* Исходной точкой нашихъ изслѣдований послужило изученіе операций умноженія двухъ бивекторовъ, которое и привело насъ къ понятію о бикватерніонѣ. Излагая винтовое счисление, мы могли бы избрать, однако, другой путь, путь намѣченный Clifford'омъ, который рассматриваетъ бикватерніонъ, какъ результатъ, про-

исходящій отъ дѣленія двухъ бивекторовъ (моторовъ, по терминологіи Clifford'a). Исходя изъ этого опредѣленія и устанавливъ a priori, по принципу устойчивости, некоторые законы операциі дѣленія, можно развить всю теорію бикватерніоновъ, шагъ за шагомъ слѣдя за Hamilton'омъ, который въ своихъ трактатахъ „Elements of Quaternions“ и „Lectures“ опредѣляетъ кватерніонъ какъ частное отъ дѣленія двухъ векторовъ, имѣющихъ общее начало, и путемъ геометрическихъ соображеній выводитъ основные свойства кватерніоновъ. Посвящающая конецъ этой главы операциі дѣленія и рассматривая бикватерніонъ какъ частное отъ дѣленія двухъ бивекторовъ, мы не имѣемъ, однако, въ виду показать, какимъ образомъ, анализируя операцию дѣленія, мы можемъ прийти къ понятію о бикватерніонѣ. Читатель найдетъ это у Clifford'a. Наша задача заключается скорѣе въ томъ, чтобы, пользуясь уже известными намъ результатами, геометрически интерпретировать бикватерніонъ и его основные свойства, а также въ общихъ чертахъ познакомиться съ тѣмъ характеромъ, который приняло бы изложеніе теоріи бикватерніоновъ, если бы мы пошли по пути Clifford-Hamilton'a. Мы увидимъ, что ту роль, которую въ теоріи кватерніоновъ играютъ вещественные числа и конечные вращенія вокругъ пересѣкающихся осей, въ теоріи бикватерніоновъ играютъ числа комплекснаго вида $a_0 + \omega a_1$, и конечные винтовые перемѣщенія вокругъ осей пересѣкающихся, или непересѣкающихся.

45. *Основные формулы.* Разсмотримъ какой видъ имѣть бикватерніонъ $q = \beta/\alpha$, где α и β суть два бивектора. Пусть, какъ и въ предыдущихъ параграфахъ, ϵ означаетъ винтъ параметра нуль ($T\epsilon = 1$), идущій по линіи кратчайшаго разстоянія между осами α и β и $\theta = \varphi + \omega d$ комплексный уголъ между ними относительно направлениія ϵ . Для β на α , мы получаемъ [(18) § 22] $\beta:\alpha = (\beta K\alpha):Na$, но $K\alpha = -\alpha$ [(15) § 22], следовательно $\beta:\alpha = -(\beta\alpha):Na = -(S\beta\alpha + V\beta\alpha):Na = (-Sa\beta + Va\beta):Na$, или, пользуясь формулами (34) и (24),

$$q = \beta/\alpha = (T\beta/T\alpha)(cs\theta + \epsilon sn\theta) \quad (36)$$

Итакъ, частное, происходящее отъ дѣленія β на α есть бикватерніонъ, у котораго тензоръ = частному отъ дѣленія тензора дѣльмата, β , на тензоръ дѣльителя, α , ось идетъ по

минію кратчайшаго разстоянія между осями α и β и уложъ
служитъ комплексныи уголъ между ними.

Изъ предъидущей формулы мы получаемъ:

$$S \frac{\beta}{\alpha} = (T\beta/T\alpha) \cos\theta \quad (37) \qquad V \frac{\beta}{\alpha} = (T\beta/T\alpha) \sin\theta \quad (38)$$

$$TV \frac{\beta}{\alpha} = (T\beta/T\alpha) \sin\theta \quad (39)$$

Припоминая, что параметръ произведенія = суммъ па-
метровъ множителей и параметръ частнаго = разности парамет-
ровъ дѣлімаго и дѣлителя [(44), (48) § 27], изъ формулъ
(37) и (39) легко находимъ:

$$PS \frac{\beta}{\alpha} = P\beta - Pa - dtg\varphi \quad (40)$$

$$PV \frac{\beta}{\alpha} = P\beta - Pa + dtg\varphi \quad (41)$$

$$S \frac{\beta}{\alpha} = (T\beta_0/T\alpha_0)(\cos\varphi + \omega[(P\beta - Pa)\cos\varphi - dsn\varphi]) \quad (42)$$

$$TV \frac{\beta}{\alpha} = (T\beta_0/T\alpha_0)(\sin\varphi + \omega[(P\beta - Pa)\sin\varphi + dcs\varphi]) \quad (43)$$

Частное отъ дѣленія β на α получаетъ другой замѣча-
тельный видъ, если мы во вторую часть (36) вмѣсто $\cos\theta$,
 $\sin\theta$, $T\alpha$, $T\beta$ подставимъ ихъ развернутыя выраженія [(30)
§ 25] и [(19) § 36] и примемъ во вниманіе, что $\varepsilon^2 = -1$;
мы получимъ тогда:

$$\beta/\alpha = [T\beta_0/T\alpha_0][1 + \omega(P\beta - Pa)][\cos\varphi + \varepsilon \sin\varphi][1 + \omega d\varepsilon] \quad (44)$$

Такимъ образомъ частное отъ дѣленія двухъ бивекторовъ
разлагается на произведение четырехъ множителей, порядокъ
которыхъ мы можемъ менять какъ угодно.

46. *Бикватерніонъ, какъ частное.* Для даннаго бикватер-
ніона $q = Tq(\cos\theta + \varepsilon \sin\theta)$ мы всегда можемъ подобрать два би-
вектора α и β такъ, чтобы $\beta/\alpha = q$. Дѣйствительно, изъ тео-

ремы предъидущаго параграфа видно, что бивекторы α и β будутъ удовлетворять равенству $\beta/\alpha = q$, если ихъ оси пересѣкаютъ ось q подъ прямымъ угломъ, если комплексный уголъ между осями = углу биковатерніона q , θ , и если, наконецъ, $T\beta/T\alpha = Tq$. Эти условія, не опредѣляя вполнѣ бивекторовъ α и β , даютъ только относительное положеніе осей α и β и отношеніе ихъ тензоровъ, такъ что одинъ изъ бивекторовъ α , или β мы можемъ выбратьъ произвольно, лишь бы ось его пересѣкала ось q подъ прямымъ угломъ, и только тогда другой изъ нихъ опредѣлится. Такъ какъ существуетъ ∞^4 бивекторовъ, оси которыхъ пересѣкаютъ ось q подъ прямымъ угломъ и которые могутъ быть приняты или за α , или за β , то существуетъ ∞^4 паръ бивекторовъ, удовлетворяющихъ условію $\beta/\alpha = q$.

Итакъ, всякий биковатерніонъ q мы можемъ разсматривать какъ частное отъ дѣленія двухъ бивекторовъ β на α . Всякий бивекторъ, ось котораго пересѣкаетъ ось q подъ прямымъ угломъ, мы можемъ принять или за бивекторъ α , или за бивекторъ β и въ первомъ случаѣ подобрать бивекторъ β , а во второмъ бивекторъ α такъ, чтобы $\beta/\alpha = q$.

Имѣя возможность представить биковатерніонъ q въ видѣ β/α мы можемъ геометрически изобразить его совокупностью бивекторовъ α , β и винта ϵ параметра нуль, ось котораго идетъ по линіи кратчайшаго разстоянія между осями α и β и имѣеть такое направлениe, относительно котораго уголъ между дѣлителемъ α и дѣлимымъ β положителенъ. Благодаря послѣднему условію, мы всегда можемъ по направлению оси ϵ опредѣлить, который изъ бивекторовъ α и β есть дѣлитель и который — дѣлимое. Если, впрочемъ, это намъ известно, то намъ не надо знать направлениа оси ϵ , и биковатерніонъ q мы можемъ задать только двумя бивекторами α и β . Когда биковатерніонъ задача геометрически, не трудно выразить его и комплекснымъ числомъ.

Понятно, что при геометрическомъ изображеніи биковатерніона его свойствамъ будутъ соотвѣтствовать свойства трехъ бивекторовъ α , β и ϵ и операциямъ надъ биковатерніонами нѣкоторая геометрическія построенія. Къ разсмотрѣнію геометрическихъ интерпретацій свойствъ биковатерніоновъ и изученію геометрическихъ построеній, отвѣчающихъ операциямъ надъ ними, мы теперь и переходимъ.

47. Приведение бикватернионов к одному знаменателю, или числителю. Щетка. Одношеточные или коллинеарные бикватернионы. Пусть мы имъемъ два бикватериона q и q' . Построимъ линію кратчайшаго разстоянія между осами q и q' и примемъ ее за ось бивектора β съ произвольнымъ тензоромъ. Ось бивектора β будетъ пересѣкать какъ ось q' , такъ и ось q , подъ прямымъ угломъ, а потому, на основаніи предыдущаго параграфа, мы всегда можемъ подобрать бивекторы a , a' , y , y' такъ, что $q = \beta/a = a'/\beta$ и $q' = y/\beta = \beta/y'$. Итакъ мы приходимъ къ слѣдующему результату.

Если мы импемъ какіе либо два бикватериона q и q' , то мы всегда можемъ представить ихъ

I. въ видѣ двухъ дробей, $q = \beta/a$ и $q' = \beta/y'$, у которыхъ числители одинаковы;

II. въ видѣ двухъ дробей $q = a'/\beta$ и $q' = y/\beta$, у которыхъ знаменатели одинаковы;

III. въ видѣ такихъ дробей $q = \beta/a$, $q' = y/\beta$, что числитель одной равенъ знаменателю другой.

Когда мы имъемъ три, или болѣе, бикватернионовъ $q, q', q'' \dots$, то, вообще говоря, мы не можемъ сдѣлать у всѣхъ числители, или знаменатели одинаковыми и не можемъ общій числитель нѣкоторыхъ сдѣлать общимъ знаменателемъ у остальныхъ. Очевидно это будетъ возможно только тогда, когда оси данныхъ бикватернионовъ имѣютъ общую линію кратчайшаго разстоянія и, слѣдовательно, всѣ пересѣкаютъ одну и ту же прямую подъ прямымъ угломъ. Въ дальнѣйшемъ мы весьма часто будемъ встрѣчаться съ геометрической формой, которую образуетъ совокупность прямыхъ, пересѣкающихъ одну и ту же прямую подъ прямымъ угломъ, мы будемъ называть эту форму щеткой. Такимъ образомъ, оси данныхъ бикватернионовъ должны принадлежать къ одной и той же щеткѣ. Бикватернионы, удовлетворяющіе этому условію, мы можемъ назвать, поэтому, одношеточными бикватернионами.

Замѣтимъ, что одношеточные бикватернионы аналогичны по своимъ свойствамъ съ коллинеарными кватернионами [Hamilton, Elements, § 209], оси которыхъ перпендикулярны въ одной и той же прямой; поэтому мы можемъ назвать ихъ также коллинеарными бикватернионами.

Итакъ, для того, чтобы три, или болѣе, бикватернионовъ мы могли представить въ видѣ дробей, у которыхъ или чис-

лители одинаковы, или знаменатели одинаковы, или общий числитель однихъ служитъ общимъ знаменателемъ другихъ, необходимо и достаточно, чтобы данные бикватерніоны были одношеточными или коллинеарными бикватерніонами.

48. Сложение, вычитание, умножение и дѣленіе бикватерніоновъ. Желая сложить два данныхъ бикватерніона q и q' , мы представимъ ихъ въ видѣ дробей, у которыхъ знаменатели одинаковы: $q = \alpha'/\beta$ и $q' = \gamma/\beta$ [см. предыдущій параграфъ]. Умножая сумму $q + q'$ на β , мы получаемъ $(q + q')\beta = (\alpha'/\beta + \gamma/\beta)\beta = (\alpha'/\beta)\beta + (\gamma/\beta)\beta = \alpha' + \gamma$, откуда

$$q + q' = \alpha'/\beta + \gamma/\beta = (\alpha' + \gamma)/\beta. \quad (45)$$

Такимъ образомъ, сумма $q + q'$ геометрически будетъ изображаться совокупностью двухъ бивекторовъ $\alpha' + \gamma$ и β , изъ которыхъ второй намъ извѣстенъ, а первый, $\alpha' + \gamma$, строится по извѣстнымъ правиламъ помощью цилиндроида. Подобнымъ же образомъ строится и разность двухъ бикватерніоновъ:

$$q - q' = \alpha'/\beta - \gamma/\beta = (\alpha' - \gamma)/\beta \quad (46)$$

Если мы хотимъ построить бикватерніонъ $q'.q$, то изображаемъ q и q' дробями такъ, чтобы знаменатель множителя — числителю множимаго: $q = \beta/\alpha$ и $q' = \gamma/\beta$. Умножая произведеніе $q'.q$ на α , мы имѣемъ: $(q'q)\alpha = \left(\frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha}\right)\alpha = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha}\alpha\right) = \frac{\gamma}{\beta}\beta = \gamma$, откуда

$$q'q = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}. \quad (47)$$

Такимъ образомъ, произведеніе будетъ изображаться бивекторами α и γ . Замѣтимъ, что фигура, которую образуютъ оси бивекторовъ α, β, γ и оси бикватерніоновъ q, q' и $q'q$, представляеть косой шестиугольникъ, всѣ углы котораго прямые.

Наконецъ, чтобы построить частное $q':q$ представимъ q и q' въ видѣ дробей съ одинаковыми знаменателями: $q = \alpha'/\beta$ и $q' = \gamma/\beta$. Мы увидимъ далѣе [см. § 55], что бикватерніонъ обратный къ q , $q^{-1} = \beta/\alpha'$, а потому, означая частное $q':q$ черезъ q'' , мы будемъ имѣть

$$q'' = q'/q = q'.q^{-1} = (\gamma/\beta) : (\alpha'/\beta) = (\gamma/\beta) \cdot (\beta/\alpha') = \gamma/\alpha' \quad (48).$$

Частное, следовательно, будет изображаться совокупностью бивекторов α' и γ .

49. *Разложение бикватерниона на сумму двухъ. Геометрическое значение знаковъ S и V и ихъ основного свойства.* Если въ бикватернионѣ $q = \beta/\alpha$ мы разложимъ числитель, бивекторъ β , на сумму двухъ, $\beta' + \beta''$, то и бикватернионъ q разложится на сумму двухъ: $q = q' + q''$, где $q' = \beta'/\alpha$ и $q'' = \beta''/\alpha$. Одно изъ этихъ разложенийъ, соответствующее разложению бикватерниона на его скалярную и векторную части, особенно важно. Его мы теперь и разсмотримъ.

Построимъ винтъ ϵ параметра нуль, которому осью служить линія кратчайшаго разстоянія между осями α и β , и черезъ точку пересѣченія осей α и ϵ , означимъ ее черезъ O , проведемъ линію α' , перпендикулярную къ плоскости прямыхъ α и ϵ . Если мы примемъ точку O за точку приведенія бивектора β , то онъ будетъ характеризоваться двумя векторами β_0 и β_1 , которые будутъ лежать въ плоскости осей α и α' , ибо первый есть главный векторъ и параллеленъ оси β , а второй есть скорость точки O при винтовомъ движеніи, опредѣляемомъ бивекторомъ β , и перпендикуляренъ къ линіи кратчайшаго разстоянія, т. е. къ оси ϵ . Каждый изъ векторовъ β_0 и β_1 мы можемъ, следовательно, разложить на два по направленимъ осей α и α' , тогда и бивекторъ β разложится на сумму двухъ бивекторовъ β' и β'' , изъ которыхъ одинъ имѣеть свою ось α , а другой прямую α' . Легко опредѣлить тензоры этихъ бивекторовъ. Векторъ β_0 образуетъ съ осью α уголъ $\varphi = \text{углу}$ между осями α и β и его проекціи на ось α и прямую α' будутъ $T\beta_0 c\varphi$ и $T\beta_0 s\varphi$. Векторъ β_1 , слагаясь изъ двухъ: скорости поступательной, равной $T\beta_0 d$, где d есть кратчайшее разстояніе между осями α и β , и перпендикулярной къ направлению β_0 , будетъ имѣть по осямъ α и α' составляющія $T\beta_0(P\beta.c\varphi - ds\varphi)$ и $T\beta_0(P\beta.s\varphi + dc\varphi)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} T\beta' &= T\beta_0[c\varphi + \omega(P\beta.c\varphi - ds\varphi)] \\ &= T\beta_0(1 + \omega P\beta)(c\varphi - \omega ds\varphi) = T\beta c s\theta \\ T\beta'' &= T\beta_0[s\varphi + \omega(P\beta.s\varphi + dc\varphi)] \\ &= T\beta_0(1 + \omega P\beta)(s\varphi + \omega dc\varphi) = T\beta s n\theta, \end{aligned}$$

гдѣ $\theta = \phi + \omega d$ есть комплексный уголъ между осами α и β . Пользуясь теоремой § 45, мы находимъ, что $\beta'/\alpha = (T\beta \cos \theta) : Ta$ и $\beta''/\alpha = (T\beta \sin \theta) : Ta$ и, слѣдовательно,

$$\beta'/\alpha = S \frac{\beta}{\alpha} = Sq; \quad \beta''/\alpha = V \frac{\beta}{\alpha} = Vq \quad (49)$$

$$q = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta'}{\alpha} + \frac{\beta''}{\alpha} = S \frac{\beta}{\alpha} + V \frac{\beta}{\alpha} = Sq + Vq \quad (50)$$

Итакъ, если мы, представивъ бикватерніонъ q въ видѣ β/α , разложимъ бивекторъ β на сумму двухъ, $\beta' + \beta''$, изъ которыхъ первый имѣть свою ось α , а второй прямую, пересѣкающую ось α въ точкѣ ея встրѣчи съ линіей кратчайшаго разстоянія между осами α и β и перпендикулярную къ этой линіи и къ оси α , то бикватерніонъ разложится на сумму двухъ: $q' = \beta'/\alpha$ и $q'' = \beta''/\alpha$; первый изъ нихъ будетъ скалярнымъ числомъ, Sq , а второй — бивекторомъ, Vq .

Главное свойство знаковъ S и V выражается равенствами

$$S(q + q') = Sq + Sq', \quad (51)$$

$$V(q + q') = Vq' + Vq', \quad (52)$$

которыя очевидны, пока мы рассматриваемъ бикватерніоны какъ комплексныя числа, и представляютъ двѣ теоремы теоріи винтовъ, если мы будемъ разсматривать бикватерніоны какъ частное отъ дѣленія двухъ бивекторовъ и интерпретировать скалярную и векторную части бикватерніона такъ, какъ только что было указано. Не трудно показать, что эти теоремы равносильны тѣмъ, которыя выражаютъ собой свойство дистрибутивности скалярного и векторного умноженія бивекторовъ. Дѣйстително, представивъ бикватерніоны q и q' въ видѣ $q = \alpha'/\beta$ и $q' = \gamma/\beta$, мы по § 45 имѣемъ формулы

$$Sq = -Sa'\beta:N\beta \quad Sq' = -S\gamma\beta:N\beta,$$

$$S(q + q') = S[(\alpha' + \gamma):\beta] = -[S(\alpha' + \gamma)\beta]:N\beta$$

изъ которыхъ видимъ, что равенство $S(\alpha' + \gamma)\beta = Sa'\beta + S\gamma\beta$ влечетъ за собой $S(q + q') = Sq + Sq'$ и обратно изъ равенства

второго слѣдуетъ первое. Такжѣ докажемъ, что равенство $V(q+q')=Vq+Vq'$ равносильно равенству $V(\alpha'+\gamma)\beta=Va'\beta+V\gamma\beta$. Мы ограничимся здѣсь этими указаніями, отлагая до слѣдующей главы разсмотрѣніе геометрическаго смысла свойствъ дистрибутивности скалярнаго и векторнаго умноженія бивекторовъ, а слѣдовательно и формулъ (51) и (52).

50. Случай, когда $S\beta/\alpha=0$, $PS\beta/\alpha=\infty$, $V\beta/\alpha=0$, $PV\beta/\alpha=\infty$. Прямой бикватерніонъ. Такъ какъ въ числитель $S\beta/\alpha$ стоитъ $T\beta.cs\theta$ [см. (49) или (37)] то $PS\beta/\alpha=\infty$, 1) если $P\beta=\infty$; но $Pcs\theta\neq\infty$ и 2) если $Pcs\theta=\infty$, но $P\beta\neq\infty$; $S\beta/\alpha=0$, 1) если $T\beta=0$, 2) если $cs\theta=0$ и въ 3) если $P\beta=\infty$ и $Pcs\theta=\infty$; вслѣдствіе неопредѣленности положенія оси β мы можемъ разсматривать этотъ случай какъ частный случай предъидущаго [см. разсужденія § 38].

Итакъ, $PS\beta/\alpha=\infty$, 1) когда параметръ дѣлимао $=\infty$ и направлениа осей α и β не перпендикулярны и 2) когда $P\beta\neq\infty$ и оси, не перспектируясь, взаимно перпендикулярны;

$S\beta/\alpha=0$, 1) когда числитель $\beta=0$ и 2) когда оси α и β перспектируются подъ прямымъ угломъ.

Такъ какъ въ числитель $TV\beta/\alpha$ стоитъ $T\beta sn\theta$ [см. (49) или (38)], то

$PV\beta/\alpha=\infty$, 1) если $P\beta=\infty$, но $Psn\theta\neq\infty$ и 2) если $Psn\theta=\infty$, но $P\beta\neq\infty$;

$V\beta/\alpha=0$, 1) если $T\beta=0$, 2) если $sn\theta=0$ и въ 3) если $P\beta=\infty$ и $Psn\theta=\infty$; вслѣдствіе неопредѣленности положенія оси мы можемъ разсматривать этотъ случай, какъ частный случай предъидущаго [см. разсужденія § 41].

Итакъ, $PV\beta/\alpha=\infty$, 1) когда параметръ дѣлимао $=\infty$ и оси α и β не параллельны и 2) когда $P\beta\neq\infty$ и оси, не совпадая, параллельны;

$V\beta/\alpha=0$, 1) когда числитель $\beta=0$ и 2) когда оси α и β совпадаютъ.

Изъ предъидущихъ теоремъ слѣдуетъ.

I. $\beta/\alpha=0$ только тогда, когда $\beta=0$.

II. Если дѣлимо $\beta\neq 0$, то частное β/α только тогда будетъ скалярнымъ числомъ, когда оси β и α совпадаютъ, и только тогда будетъ бивекторомъ, когда оси α и β пересекаются подъ прямымъ угломъ.

III. Бивекторъ δ мы можемъ рассматривать какъ частное отъ дѣленія двухъ бивекторовъ, оси которыхъ взаимно перпендикулярны и пересѣкаются ось δ подъ прямымъ угломъ въ одной и той же точкѣ. Въ этомъ смыслѣ всякий бивекторъ мы можемъ назвать прямымъ бикватерніономъ.

51. *Бикватерніонъ, какъ факторъ.* Изъ самаго опредѣленія операциіи дѣленія слѣдуетъ, что β/α есть такой бикватерніонъ q , что $\beta=q\alpha$. Бикватерніонъ q , рассматриваемый какъ факторъ, преобразуетъ, слѣдовательно, бивекторъ α въ бивекторъ β , онъ эквивалентъ, стало быть, совокупности нѣкоторыхъ геометрическихъ операций, помощью которыхъ бивекторъ α переводится въ бивекторъ β . Если мы примемъ точку приведенія бивектора α на его оси, то онъ будетъ опредѣляться совокупностью двухъ векторовъ α_0 и α_1 , лежащихъ на оси α , или совокупностью вектора α_0 и $P\alpha=\alpha_1/\alpha_0$; точно также бивекторъ β опредѣляется двумя векторами β_0 и β_1 , лежащими на его оси, или же векторомъ β_0 и параметромъ $P\beta=\beta_1/\beta_0$. Такимъ образомъ, бивекторы β и α отличаются одинъ отъ другаго положеніемъ ихъ осей, длиною векторовъ β_0 и α_0 и величиной ихъ параметровъ, $P\beta$ и $P\alpha$, и для того, чтобы преобразовать бивекторъ α въ бивекторъ β , мы должны перемѣстить ось α до совпаденія ея съ осью β и превратить векторъ α_0 въ β_0 и $P\alpha$ въ $P\beta$. Преобразованіе бивектора α въ бивекторъ β можетъ быть разсматриваемо, слѣдовательно, какъ нѣкоторая сложная операциія, которую мы можемъ разложить на четыре части.

I. При первомъ преобразованіи оставляемъ неизмѣнными положеніе и направление оси α , но измѣняемъ главную часть a, α_0 , такъ, чтобы α_0 сдѣлался по длини равнымъ вектору β_0 ; съ этою цѣлью мы должны α_0 умножить на отношеніе длинь векторовъ β_0 и α_0 , т. е. на $T\beta_0/T\alpha_0$. Мы получаемъ тогда бивекторъ β' , который имѣть общую ось съ α , и тензоръ котораго $T\beta'=T\beta_0(1+\omega P\alpha)$.

II. Не измѣняя оси бивектора β' , совпадающей съ осью α , и его главного вектора, измѣнимъ $P\beta'=P\alpha$ такъ, чтобы онъ сдѣлался равнымъ $P\beta$; для этого мы должны къ параметру $P\alpha$ прибавить разность $P\beta-P\alpha$. Мы получимъ тогда бивекторъ β'' , имѣющій общую ось съ α и тензоръ котораго $T\beta''=T\beta_0(1+\omega P\beta)=T\beta$.

III. Построимъ линію кратчайшаго разстоянія между осами α и β и означимъ черезъ ϵ винтъ параметра нуль, имѣющій эту прямую своею осью. Третье преобразованіе состоитъ въ томъ, что мы, не измѣняя $T\beta''=T\beta$, измѣняемъ направление оси β'' (оси α) такъ, чтобы она сдѣлалась параллельной оси бивектора β , для чего поворачиваемъ ось β'' (ось α) вокругъ оси ϵ на уголъ φ въ направленіи, опредѣляемомъ знакомъ φ . Мы получимъ тогда бивекторъ β''' , ось котораго пересѣкаетъ ось ϵ и параллельна оси β , и тензоръ котораго $T\beta'''=T\beta_0(1+\omega P\beta)=T\beta$.

IV. Наконецъ, не измѣняя тензора бивектора β''' и направленія его оси, переносимъ послѣднюю поступательно по направленію оси ϵ на величину d такъ, чтобы она изъ положенія β''' перешла окончательно въ положеніе оси β . Тогда мы получимъ бивекторъ β .

Чтобы выполнить первыя двѣ операциіи мы должны знать два числа: отношеніе $T\beta_0:T\alpha_0$ и разность $P\beta-P\alpha$; для третьей операциіи намъ должны быть даны: прямая ϵ , положеніе которой опредѣляется четырьмя величинами и уголъ поворота—углу между осами α и β ; наконецъ, для совершенія четвертой операциіи мы должны знать разстояніе d . Такимъ образомъ сложная операциія преобразованія бивектора α въ β можетъ быть задана 8 величинами, и бикватерніонъ $q=\beta/\alpha$, который характеризуетъ эти операциіи, долженъ содержать 8 величинъ, что, какъ намъ извѣстно, дѣйствительно имѣть мѣсто.

Каждую изъ указанныхъ операций мы будемъ называть элементарной операцией. Такимъ образомъ, бикватерніонъ q , рассматриваемый какъ факторъ, эквивалентъ, вообще говоря, четыремъ элементарнымъ операциямъ. Двѣ изъ нихъ мѣняютъ тензоръ бивектора α , оставляя неизмѣнной его ось, двѣ другія мѣняютъ положеніе оси α , оставляя неизмѣннымъ его тензоръ.

52. Элементарные бикватерніоны. Въ частныхъ случаяхъ при преобразованіи бивектора α въ бивекторъ β можетъ отсутствовать та, или другая, операциія; можетъ также случиться, что достаточно будетъ выполнить только одну изъ этихъ операций. Такъ, если оси α и β совпадаютъ, то для преобразованія α въ β достаточно выполнить только первую операцию, когда $P\alpha=P\beta$ и только вторую, когда $T\alpha_0=T\beta_0$. Если $T\alpha=T\beta$, то достаточно повернуть ось α на некоторый уголъ, т. е.

выполнить третью операцию, когда оси α и β пересекаются и сообщить оси α только поступательное перемещение, т. е. выполнить четвертую операцию, когда оси α и β параллельны. Въ этихъ случаяхъ бикватерніонъ $q = \beta/\alpha$ будетъ эквивалентъ одной изъ элементарныхъ операций, и мы будемъ называть его элементарнымъ бикватерніономъ. Элементарные бикватерніоны могутъ быть, следовательно, четырехъ типовъ; разсмотримъ ихъ.

I. Пусть оси α и β совпадаютъ и $P\alpha = P\beta$; тогда $\theta = \varphi + \omega d = 0$ и формула (36) намъ даетъ:

$$\beta : \alpha = T\beta_0 : T\alpha_0, \quad (53)$$

т. е. частное отъ дѣленія двухъ бивекторовъ, имѣющихъ общую ось и одинаковый параметръ, есть вещественное число=частному отъ дѣленія длины главныхъ векторовъ. Итакъ, элементарный бикватерніонъ первого типа есть вещественное число.

II. Пусть оси α и β совпадаютъ и $\alpha_0 = \beta_0$; тогда $T\alpha_0 = T\beta_0$, $\theta = \varphi + \omega d = 0$ и формула (36) даетъ:

$$\beta : \alpha = 1 + \omega(P\beta - I\alpha), \quad (54)$$

т. е. частное отъ дѣленія двухъ бивекторовъ, имѣющихъ общую ось и одинаковый главный векторъ, есть комплексное число, главная часть котораго=единицѣ и параметръ= $P\beta - Pa$. Итакъ, элементарный бикватерніонъ второго типа есть комплексное число вида $a_0 + \omega a_1$, у котораго главная часть, a_0 =единица.

III. Пусть оси α и β пересекаются и $T\alpha = T\beta$; тогда $\theta = \varphi$ ($d = 0$) и мы получаемъ (36):

$$\beta : \alpha = c s \varphi + e s n \varphi, \quad (55)$$

т. е. частное отъ дѣленія двухъ бивекторовъ, у которыхъ оси пересекаются и тензоры одинаковы,=косинусу угла между осами+винтъ параметра нуль, ось котораго проходитъ черезъ точку пересѣченія осей и къ нимъ перпендикулярна, умноженный на синусъ того же угла. Умножая бивекторъ α на $c s \varphi + e s n \varphi$, мы получаемъ бивекторъ β ; следовательно, бикватерніонъ $c s \varphi + e s n \varphi$, рассматриваемый какъ факторъ, поворачиваетъ ось

α на угол φ вокруг оси ϵ , и мы можемъ назвать его вращающимъ бикватерниономъ. Итакъ, бикватерніонъ третьего типа, вращающий бикватерніонъ, равняется косинусу некотораго угла + винтъ параметра нуль, умноженный на синусъ того же угла.

IV. Пусть оси α и β параллельны и $T\alpha = T\beta$; тогда $\theta = \omega d(\varphi = 0)$ и мы получаемъ (36):

$$\beta : \alpha = 1 + \omega d \epsilon \quad (56)$$

т. е. частное отъ дѣленія двухъ бивекторовъ, имѣющихъ оси одинакового направления и одинаковые тензоры, — единицы + винтъ произвольного параметра, ось котораго перпендикулярна къ осямъ бивекторовъ α и β и параллельна ихъ плоскости, умноженный на ωd , гдѣ d есть разстояніе между осями α и β . Умножая α на $1 + \omega d \epsilon$, мы получаемъ β ; следовательно, бикватерніонъ $1 + \omega d \epsilon$, рассматриваемый какъ факторъ, сообщаєтъ оси α поступательное перемѣщение, не измѣняя его тензора, и мы можемъ назвать его поступательнымъ бикватерніономъ. Итакъ, элементарный бикватерніонъ четвертаго типа, поступательный бикватерніонъ, равенъ единице + бивекторъ безконечно большаго параметра.

53. Разложение бикватерніона на множители. Всякій неэлементарный бикватерніонъ, получающійся при дѣленіи β на α , эквивалентъ совокупности двухъ, или трехъ, или четырехъ элементарныхъ операций и соответственно этому можетъ быть разложенъ на произведение двухъ, трехъ, или четырехъ элементарныхъ бикватерніоновъ. Въ самомъ дѣлѣ, обратимся къ общему случаю, когда бикватерніонъ эквивалентъ четыремъ элементарнымъ операциямъ. Бикватерніонъ β'/α , гдѣ β' есть бивекторъ, въ который первая операция преобразуетъ бивекторъ α [см. § 51] есть элементарный бикватерніонъ первого типа; означая его черезъ q' , мы имѣемъ:

$$q' = T\beta'_0 T\alpha_0 \text{ и } \beta' = q'\alpha.$$

Бикватерніонъ $q'' = \beta''/\beta'$, гдѣ β'' есть бивекторъ, въ который вторая операция преобразуетъ бивекторъ β' , есть элементарный бикватерніонъ втораго типа; мы имѣемъ:

$$q' = \beta'':\beta' = 1 + \omega(P\beta - P\alpha) \text{ и } \beta'' = q''\beta' = q''q'\alpha.$$

Далѣе, бикватерніонъ $q''' = \beta'''/\beta''$, гдѣ β''' есть бивекторъ, въ который третья операція преобразуетъ бивекторъ β'' , есть вращающій бикватерніонъ, и слѣдовательно

$$q''' = \beta''' \cdot \beta'' = c s \varphi + \varepsilon s n \varphi \text{ и } \beta''' = q''' \beta'' = q''' q'' q' \alpha$$

Наконецъ, бикватерніонъ $q'''' = \beta/\beta''$ есть бикватерніонъ поступательный, и слѣдовательно

$$q'''' = \beta; \beta''' = 1 + \omega d \varepsilon \text{ и } \beta = q'''' \beta''' = q'''' q''' q'' q' \alpha,$$

откуда

$$q = \beta : \alpha = q'''' q''' q'' q',$$

что и доказываетъ наше положеніе. Такимъ образомъ, мы приходимъ снова путемъ геометрическихъ соображеній къ формулѣ [(44) § 45]. Всякій разъ, когда въ преобразованіи бивектора α въ β будетъ отсутствовать какая нибудь изъ элементарныхъ операцій, соответствующей этой операціи элементарный бикватерніонъ обращается въ единицу. Такъ напримѣръ, если оси α и β параллельны и одинаково направлены, то для преобразованія α въ β нѣтъ надобности поворачивать оси α ; слѣдовательно, операція третья будетъ отсутствовать, и вращающій бикватерніонъ $c s \varphi + \varepsilon s n \varphi = 1$. Итакъ

Бикватерніонъ β/α разлагается на произведение, вообще говоря, четырехъ элементарныхъ бикватерніоновъ; причемъ каждой изъ элементарныхъ операцій, постулатившими примененіемъ которыхъ мы можемъ бивекторъ α преобразовать въ бивекторъ β , соответствуетъ свой опредѣленный множитель, который обращается всякий разъ въ единицу, когда въ преобразованіи α въ β отсутствуетъ соответствующая ему операція.

Такъ какъ всякий бикватерніонъ q мы можемъ рассматривать какъ частное отъ дѣленія двухъ бивекторовъ, то изъ предыдущей теоремы слѣдуетъ, что всякий бикватерніонъ q мы можемъ разложить на произведение четырехъ элементарныхъ бикватерніоновъ. Дѣйствительно, представивъ q въ видѣ $q = Tq(c s \theta + \varepsilon s n \theta)$, гдѣ $\theta = \varphi + \omega d$ есть уголъ бикватерніона [см. § 26], развертывая $Tq, c s \theta$ и $s n \theta$ по формуламъ [(27) § 25] и [(19) § 36] и замѣчая, что $\varepsilon^2 = -1$, мы получаемъ:

$$q = Tq_0(1 + \omega Pq)(c s \varphi + \varepsilon s n \varphi)(1 + \omega d \varepsilon) \quad (57)$$

54. *Тензоръ и верзоръ бикватерниона и ихъ главное свойство.* Въ предыдущемъ параграфѣ мы разложили бикватернионъ q на произведение четырехъ элементарныхъ бикватернионовъ. Произведеніе двухъ изъ нихъ даетъ намъ тензоръ q , произведеніе двухъ другихъ его верзоръ:

$$\begin{aligned} Tq &= Tq_o(1 + \omega Pq) \\ Uq &= (cs\varphi + esn\varphi)(1 + \omega d\varepsilon) \\ q &= Tq \cdot Uq. \end{aligned} \quad (58)$$

Если бы мы представили бикватернионъ q въ видѣ $q = \beta/\alpha$, то

$$Tq = T\beta : T\alpha \quad (59)$$

$$Uq = U\beta : U\alpha. \quad (60)$$

Первая изъ этихъ формулъ была доказана уже въ § 45 [форм. (36)]. Вторая слѣдуетъ изъ той же формулы (36), которая даетъ намъ $U\beta : U\alpha = cs\theta + esn\theta$, если мы припомнимъ, что $U\alpha$ и $U\beta$ суть винты, оси которыхъ совпадаютъ соотвѣтственно съ осями α и β и параметры которыхъ равны нулю, такъ что $TU\alpha = 1$ и $TU\beta = 1$.

Изъ (59) и (60) легко выводятся формулы (43) и (45) § 27. Мы должны только представить бикватернионы q и q' въ видѣ β/α и γ/β ; тогда пользуясь [(47) § 48], мы будемъ имѣть

$$Tq'q = T(\gamma:\alpha) = T\gamma:T\alpha = (T\gamma:T\beta)(T\beta:T\alpha) = Tq'Tq \quad (61)$$

$$Uq'q = U(\gamma:\alpha) = U\gamma:U\alpha = (U\gamma:U\beta)(U\beta:U\alpha) = Uq'Uq. \quad (62)$$

55. *Бикватернионы, связанные съ данными.* Имѣя вѣкоторый бикватернионъ

$$q = \beta:\alpha = Tq_o(1 + \omega Pq)(cs\varphi + esn\varphi)(1 + \omega d\varepsilon),$$

гдѣ $Pq = P\beta - P\alpha$ и $Tq_o = T\beta_o:T\alpha_o$, мы можемъ получить изъ него цѣлый рядъ другихъ, если измѣнимъ знакъ у одного, двухъ, или у всѣхъ трехъ чиселъ Pq , φ , d и оставимъ въ то же время множитель Tq_o безъ измѣненія, или замѣнимъ его величиной обратной. Мы будемъ имѣть такимъ образомъ всего 16 бикватернионовъ, включая въ ихъ число и данный. Четыре мы получимъ, если сдѣлаемъ одну изъ указанныхъ перемѣнъ,

т. е. измѣнимъ знакъ у одного изъ чиселъ Pq , φ , d , оставляя неизмѣннымъ множитель Tq_0 , или замѣнимъ Tq_0 величиной ему обратной, сохраняя знаки Pq , φ и d . Шесть получимъ, сдѣлавъ двѣ перемѣны, четыре—три перемѣны, и наконецъ одинъ—четыре перемѣны. Разсмотримъ нѣкоторые изъ этихъ бикватерніоновъ.

Проведемъ черезъ ось α двѣ плоскости, изъ которыхъ одна, плоскость первая, перпендикулярна къ оси q и, слѣдовательно, параллельна оси β , а другая, плоскость вторая, проходитъ черезъ ось q , т. е. линію кратчайшаго разстоянія между осями α и β . Построимъ затѣмъ отраженія оси β въ этихъ плоскостяхъ, β' —отраженіе въ первой плоскости и β'' —во второй. Очевидно, что отраженія: β' во второй плоскости и β'' въ первой совпадутъ съ одной и той же прямой β''' , которая будетъ симметрична съ осью β относительно оси α . Мы будемъ имѣть, такимъ образомъ, четыре прямыхъ, которые попарно: ось β и β'' , β' и β''' лежать въ двухъ, параллельныхъ между собой и перпендикулярныхъ къ оси ϵ , плоскостяхъ, и всѣ пересѣкаютъ ось ϵ . Легко видѣть, что комплексные углы относительно направлений ϵ между осью α и β' , β'' , β''' будутъ попорядку $\varphi - \omega d$, $-\varphi + \omega d$, $-\varphi - \omega d$; слѣдовательно, если мы построимъ бивекторъ α' , β' , β'' , β''' , которые имѣютъ своими осями ось α и прямые β' , β'' , β''' и своими тензорами соответственно числа $T\alpha' = T\alpha_0(1 - \omega P\alpha)$, $T\beta' = T\beta_0(1 - \omega P\beta)$, $T\beta'' = T\beta_0(1 - \omega P\beta)$, $T\beta''' = T\beta$, то

$$q' = \beta':\alpha' = Tq_0(1 - \omega Pq)(cs\varphi + esn\varphi)(1 - \omega d\epsilon) \quad (63)$$

$$q'' = \beta'':\alpha' = Tq_0(1 - \omega Pq)(cs\varphi - esn\varphi)(1 + \omega d\epsilon) \quad (64)$$

$$q''' = \beta''':\alpha = Tq_0(1 + \omega Pq)(cs\varphi - esn\varphi)(1 - \omega d\epsilon). \quad (65)$$

Бивекторы— β' и— β'' мы можемъ назвать отраженіями бивектора β въ построенныхъ вами плоскостяхъ, бивекторъ— β' въ нормальной къ оси ϵ плоскости, бивекторъ— β'' въ плоскости, проходящей черезъ ось, ибо безконечно малы винтовыя движения, опредѣляемыя бивекторами— β' и— β'' суть отраженія въ указанныхъ плоскостяхъ винтоваго движения, опредѣляемаго бивекторомъ β ; бивекторъ— α' будетъ отраженіемъ бивектора α какъ той, такъ и въ другой плоскости. Вслѣдствіе этого бикватерніоны q' и q'' мы можемъ назвать отраженіями бикватерніона q , первый—нормальнымъ, второй—па-

раллельнымъ. Бикватерніонъ q''' есть бикватерніонъ дважды отраженный; такъ какъ онъ получается изъ q , если мы измѣнимъ знакъ у ϵ , то $q''' = Kq$ [см. (15) § 22].

Построенія, подобныя предыдущимъ, даютъ возможность получить и остальная изъ упомянутыхъ нами 16 бикватерніоновъ. Бикватерніонъ обратный данному принадлежитъ къ ихъ числу, ибо изъ равенства $(\alpha/\beta)(\beta/\alpha) = 1$, слѣдуетъ, что

$$q^{-1} = \alpha:\beta = (1:Tq_0)(1-\omega Pq)(cs\varphi - \epsilon sn\varphi)(1-\omega d\epsilon). \quad (66)$$

Умножая данный бикватерніонъ q на его отраженія, мы получаемъ интересныя формулы:

$$q'q = (Tq_0)^2(cs2\varphi + \epsilon sn2\varphi) \quad (67)$$

$$q''q = (Tq_0)^2(1 + \omega 2d\epsilon) \quad (68)$$

$$q'''q = (Tq_0)^2(1 + \omega 2Pq). \quad (69)$$

Замѣтимъ, что вообще произведеніе данного бикватерніона на бикватерніонъ, который получается изъ него путемъ n указанныхъ нами перемѣнъ ($n \geq 4$), разлагается на произведеніе $4-n$ элементарныхъ бикватерніоновъ.

56. Умноженіе бивектора α на бикватерніонъ q , ось котораго пересѣкаетъ ось α подъ прямымъ угломъ.

Произведеніе бивектора α на бикватерніонъ $q = Tq(cs\theta + \epsilon sn\theta)$, ось котораго пересѣкаетъ ось α подъ прямымъ угломъ, есть бивекторъ β , тензоръ котораго $= Tq.T\alpha$ и ось котораго мы получимъ, если сообщимъ оси α два движенія: перемѣстимъ ее поступательно на величину d по направлению оси ϵ , если $d > 0$, и въ обратномъ направлении, если $d < 0$, и затѣмъ повернемъ ее вокругъ оси ϵ на уголъ φ по часовой стрѣлкѣ, если $\varphi > 0$, и въ обратную сторону, если $\varphi < 0$. Вместо того, чтобы сообщать оси α два перемѣщенія, мы можемъ сообщить ей одно—винтовое, которое импетъ ось ϵ свою осью и опредѣляется угломъ поворота, = повороту бикватерніона q , φ , и величиной поступательного перемѣщенія, = шагу бикватерніона q , d , или, короче, угломъ $\theta = \varphi + \omega d$ бикватерніона q .

Въ самомъ дѣлѣ, при такомъ построеніи оси β комплек-
сный уголъ между осами α и β будетъ $\theta = \varphi + \omega d$ относи-
тельно направлениія ϵ и по теоремѣ § 45, мы будемъ имѣть

$\beta/\alpha = T\beta/T\alpha$ ($cs\theta + \epsilon sn\theta$), или, такъ какъ $T\beta = TqT\alpha$, то

$$\beta:\alpha = Tq(cs\theta + \epsilon sn\theta) = q,$$

откуда $\beta = qa$, что и доказываетъ нашу теорему. Очевидно, что ось β будетъ пересѣкать ось ϵ также подъ прямымъ угломъ. Изъ теоремы вытекаютъ такія слѣдствія.

I. Умножая бивекторъ α на множителя Tq_0 , или $1 + \omega Pq$, мы не измѣняемъ положенія его оси; въ первомъ случаѣ мы преобразуемъ главный векторъ α_0 въ $Tq_0 \cdot \alpha_0$, а во второмъ измѣняемъ $R\alpha$ въ $R\alpha + Pq$.

II. Умножая бивекторъ α , ось котораго пересѣкаетъ ось ϵ подъ прямымъ угломъ, на $cs\varphi + \epsilon sn\varphi$, или на $1 + \omega d\epsilon$, мы не мѣняемъ $T\alpha$, но измѣняемъ ось α ; въ первомъ случаѣ поворачиваемъ ее вокругъ оси ϵ на уголъ φ , а во второмъ— сообщаемъ ей поступательное перемѣщеніе, равное d , по направлению ϵ .

III. Умножая α на комплексное число $Tq = Tq_0(1 + \omega Pq)$, мы получаемъ бивекторъ $Tq \cdot \alpha$, имѣющій общую ось съ α и тензоръ котораго $= Tq \cdot T\alpha$.

IV. Умножая α на $(cs\varphi + \epsilon sn\varphi)(1 + \omega d\epsilon)$, мы не мѣняемъ $T\alpha$, но сообщаемъ ось α винтовое перемѣщеніе вокругъ оси ϵ , опредѣляемое комплекснымъ угломъ $\theta = \varphi + \omega d$. Такъ какъ Tq всегда можно представить въ видѣ $cs\theta + \epsilon sn\theta$, то верзоръ всякаго бикватерніана, разматриваемый какъ факторъ, опредѣляетъ нѣкоторое винтовое перемѣщеніе.

57. *Законы коммутативности и ассоціативности сложенія и дистрибутивности сложенія и умноженія.* Разматривая во второй главѣ бикватерніоны, какъ комплексныя числа, мы опредѣлили операциіи сложенія и умноженія формулами (10) § 20 и (13) § 21, изъ которыхъ просто вытекаютъ основные законы этихъ операций. Если же мы будемъ разматривать бикватерніонъ какъ частное [см. § 46], то операциіи надъ бикватерніонами будутъ соотвѣтствовать нѣкоторымъ геометрическія построjenія [см. § 48] и основные законы операций будутъ выражать собой нѣкоторыя свойства этихъ построеній. Слѣдовательно, доказавъ послѣднія путемъ геометрическихъ соображеній, мы вмѣстѣ съ тѣмъ докажемъ и основные законы операций надъ бикватерніонами. По по-воду этихъ доказательствъ мы теперь и сдѣлаемъ нѣсколько замѣчаній.

Въ § 49 мы видѣли, что бикватерніонъ q разлагается на сумму $Sq + Vq$. Если, затѣмъ, мы докажемъ геометрически формулы (51) и (52) того же параграфа, то мы разложимъ операцию сложенія бикватерніоновъ на двѣ: на сложеніе скалярныхъ чиселъ вида $a_0 + \omega a_1$ и на сложеніе бивекторовъ, и законы коммутативности и ассоціативности сложенія бикватерніоновъ будутъ слѣдоватъ изъ соотвѣтствующихъ законовъ сложенія чиселъ вида $a_0 + \omega a_1$ и бивекторовъ.

Чтобы доказать геометрически законъ дистрибутивности умноженія и сложенія, мы должны, слѣдя за Hamilton'омъ, доказать справедливость его сначала для частныхъ случаевъ коллинеарныхъ [см. § 47] и прямыхъ бикватерніоновъ [см. § 50], и тогда доказательство въ общемъ случаѣ уже не представляетъ затрудненій [см. §§ 209, 210 и 211 „Elements of Quaternions“].

58. Законъ ассоціативности умноженія. Подобно тому какъ формулы [(50); (51), (52) § 49] разлагаются операцией сложенія бикватерніоновъ на сложеніе скалярныхъ чиселъ и бивекторовъ, такъ формулы [(58), (61), (62) § 54] позволяютъ раздѣлить операцию умноженія бикватерніоновъ на двѣ: на умноженіе ихъ тензоровъ, которые суть числа вида $a_0 + \omega a_1$, и ихъ верзоровъ. Законъ ассоціативности умноженія бикватерніоновъ будетъ очевидно слѣдствиемъ соотвѣтствующихъ законовъ умноженія чиселъ вида $a_0 + \omega a_1$ и верзоровъ.

Обращаясь къ закону ассоціативности умноженія верзоровъ, разсмотримъ нѣсколько подробнѣе, чѣмъ это было сдѣлано въ § 48, геометрическія построенія, соотвѣтствующія умноженію бикватерніоновъ въ томъ частномъ случаѣ, когда они будутъ верзорами:

Пусть бикватерніонъ q есть нѣкоторый верзоръ, такъ что $Tq = 1$. Желая представить q въ видѣ β/α , мы должны въ силу условія $T\beta:T\alpha = Tq = 1$ сдѣлать $T\alpha = T\beta$, напримѣръ положить $T\alpha = T\beta = 1$ и за бивекторы α и β принять винты параметра нуль. Но винтъ параметра нуль вполнѣ опредѣляется его осью, т. е. прямой, которой мы приписываемъ определенное направленіе, а потому всякий верзоръ можетъ быть заданъ двумя прямymi α и β , къ которымъ мы можемъ присоединить еще линію кратчайшаго разстоянія между ними, указывающую своимъ направленіемъ дѣлителя и дѣлимое [см. § 46]. Прямые α и β пересекаютъ ось q подъ прямымъ

угломъ и комплексный уголъ между ними равенъ углу верзора q .

Предположимъ теперь, что мы имѣемъ два верзора q и q' . Чтобы построить $q'q$, проведемъ линію β кратчайшаго разстоянія между осами q и q' и построимъ двѣ прямыхъ α и γ , изъ которыхъ первая, α , пересѣкаетъ подъ прямымъ угломъ ось q и винтовымъ перемѣщеніемъ, опредѣляемымъ q [см. § 56] совмѣщается съ β , а вторая, γ , пересѣкаетъ ось q' и есть та прямая, въ которую переходитъ β при винтовомъ движениі, опредѣляемомъ q' . Линія кратчайшаго разстоянія между α и γ будетъ осью $q'q$, а комплексный уголъ между α и γ —угломъ $q'q$, ибо комплексные углы между пряммыми α и β , β и γ будутъ равны соответственно $\angle q$ и $\angle q'$ и слѣдовательно, если мы примемъ прямые α , β , γ за оси винтовъ параметра нуль, которые мы означимъ соответственно тѣми же буквами α , β и γ , то

$$q = \beta : \alpha, \quad q' = \gamma : \beta$$

и

$$q'q = \gamma : \alpha \quad [\text{см. (47) § 48}].$$

Фигура, которую образуютъ прямые α , β , γ и оси q , q' , $q'q$ представляетъ косой шестиугольникъ, всѣ углы котораго прямые. Такимъ образомъ, операція умноженія верзоровъ-кватерніоновъ, которая, какъ извѣстно, эквивалентна сложенію дугъ большихъ круговъ сферы, преобразуется въ теоріи бикватерніоновъ въ операцію построенія нѣкотораго шестиугольника съ пряммыми углами, благодаря чemu мы теперь уже можемъ предвидѣть аналогію между геометріей такого шестиугольника съ одной стороны и геометріей сферического треугольника съ другой.

Въ теоріи кватерніоновъ законъ ассоціативности умноженія верзоровъ-кватерніоновъ выражаетъ собой, какъ показалъ Hamilton, слѣдующую теорему сферической геометріи [см. „Elements of Quaternions“ § 264; Möbius „Neuer Beweis des in Hamilton's Lectures on Quaternions aufgestellten assciativen Princips bei der Zusammensetzung von Bögen gr ssster Kreise einer Kugelfläche“, Werke, Bd. 2].

Если мы имѣемъ сферический шестиугольникъ ($DABGJF$), обладающій тѣмъ свойствомъ, что изъ его первой, третьей и пятой сторонъ (DA, BG, JF), перемѣщая ихъ вдоль

большихъ круговъ, на которыхъ онѣ лежать, мы можемъ составить треугольникъ, то подобнымъ же образомъ можемъ составить треугольникъ и изъ второй, четвертой и шестой сторонъ (AB, GJ, FD) шестиугольника.

Болѣе сложную теорему выражаетъ законъ ассоціативности умноженія верзоровъ-бикватерніоновъ. Мы приходимъ къ этой теоремѣ, если, взавъ какіе либо три верзора q, q', q'' , построимъ сначала (такъ, какъ выше указано) верзоръ $q''(q'q)$, а потомъ, равный ему по закону ассоціативности, верзоръ $(q''q')q$. Мы получаемъ тогда довольно сложную фигуру, состоящую изъ 18 прямыхъ линій, пересѣкающихся между собой подъ прямыми углами, и законъ ассоціативности даетъ намъ вѣкоторое свойство этой фигуры. Чтобы яснѣе представить себѣ фигуру, о которой идетъ рѣчь, мы замѣтимъ, что всѣ ея 18 линій мы можемъ раздѣлить на три группы по шести линій въ каждой. Пусть $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6$ суть линіи первой группы; тогда линіи $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5, \epsilon_6$, второй группы, будутъ линіями кратчайшихъ разстояній между $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6$, и линіи $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_6$, третьей группы, — линіями кратчайшихъ разстояній между $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5, \epsilon_6$, а именно:

ϵ_1 — между δ_1 и δ_2 , ϵ_2 — между δ_2 и δ_3 , ϵ_3 — между δ_3 и δ_4 ,
 ϵ_4 — — δ_4 и δ_5 , ϵ_5 — — δ_5 и δ_6 , ϵ_6 — — δ_6 и δ_1 ,
 ζ_1 — — ϵ_6 и ϵ_2 , ζ_3 — — ϵ_2 и ϵ_4 , ζ_5 — — ϵ_4 и ϵ_6 ,
 ζ_9 — — ϵ_1 и ϵ_3 , ζ_4 — — ϵ_3 и ϵ_5 , ζ_6 — — ϵ_5 и ϵ_1 .

Если мы условимся комплексный уголъ между двумя прямыми α и β означать черезъ $(\alpha \beta)$, то законъ ассоціативности будетъ выражать слѣдующее свойство этой фигуры: если

$$(\zeta_2 \zeta_4) = (\delta_3 \delta_4), (\zeta_4 \zeta_6) = (\delta_5 \delta_6), (\zeta_6 \zeta_2) = (\delta_1 \delta_2),$$

то $(\zeta_1 \zeta_3) = (\delta_2 \delta_3), (\zeta_3 \zeta_5) = (\delta_4 \delta_5), (\zeta_5 \zeta_1) = (\delta_6 \delta_1).$

Въ томъ, что вышеуказанная теорема сферической геометріи преобразуется въ теоріи бикватерніоновъ въ только

что приведенную теорему, читатель убѣдится въ слѣдующей главѣ.

Самъ Hamilton даетъ нѣсколько геометрическихъ доказательствъ закона ассоціативности умноженія верзоровъ-кватерніоновъ. Одно изъ нихъ, наиболѣе изящное и естественное, основано на свойствахъ сфероконического съченія, открытыхъ Chasles'емъ, который мы можемъ рассматривать также какъ свойства конуса втораго порядка. Не менѣе изящно доказательство, предложенное Möbius'омъ (l. c.). Онъ замѣчаетъ, что извѣстная теорема Hamilton'a, по которой умноженіе двухъ верзоровъ-кватерніоновъ эквивалентно сложенію двухъ конечныхъ вращательныхъ перемѣщений неизмѣняемой системы вокругъ пересѣкающихся осей, легко можетъ быть доказана геометрически. Если же эта теорема доказана, то законъ ассоціативности умноженія слѣдуетъ изъ ассоціативности сложенія трехъ конечныхъ вращеній вокругъ пересѣкающихся осей.

Каждое изъ доказательствъ закона ассоціативности умноженія верзоровъ-кватерніоновъ, будучи надлежащимъ образомъ обобщено, даетъ намъ доказательство закона ассоціативности умноженія верзоровъ-бикватерніоновъ, а слѣдовательно и вышеприведенной теоремы относительно 18 прямыхъ. Такъ напримѣрь, въ слѣдующей главѣ мы увидимъ, что конусу втораго порядка аналогична вѣкоторая конгруэнція, и что вышеупомянутымъ свойствамъ сфероконического съченія соответствуютъ нѣкоторыя свойства этой конгруэнціи, которыми мы и могли бы воспользоваться для доказательства нашей теоремы. Подобнымъ же образомъ можетъ быть обобщено и доказательство Möbius'a. Достаточно только показать, что построение $q'q$ эквивалентно сложенію двухъ конечныхъ винтовыхъ перемѣщений, и тогда законъ ассоціативности умноженія будетъ вытекать изъ ассоціативности сложенія трехъ конечныхъ винтовыхъ перемѣщений. На этомъ распространеніи доказательства Möbius'a мы остановимся подробнѣе въ слѣдующей главѣ.

59. Одноосные бикватерніоны. Амебра щетки. Бикватерніоны, имѣющіе общую ось мы будемъ называть одноосными бикватерніонами. Перемножая одноосные бикватерніоны

$$q = Tq(cs\theta + \varepsilon sn\theta) \text{ и } q' = Tq'(cs\theta' + \varepsilon sn\theta')$$

мы получаемъ бикватерніонъ

$$q'q = Tq \cdot Tq' [cs(\theta + \theta') + \varepsilon sn(\theta + \theta')] \quad (70)$$

одноосный съ множителями q и q' . Операција умноженія одноосныхъ бикватерніановъ коммутативна, это видно изъ предыдущей формулы, а потому дѣленіе одноосныхъ бикватерніоновъ можетъ быть только одного типа, а именно:

$$q':q = (Tq':Tq)[cs(\theta' - \theta) + \varepsilon sn(\theta' - \theta)]. \quad (71)$$

Частное, какъ видимъ, есть бикватерніонъ одноосный съ q и q' . Одноосными съ q и q' будутъ также и бикватерніоны $q' + q$ и $q' - q$. Такимъ образомъ, совокупность одноосныхъ бикватерніоновъ образуетъ замкнутую область комплексныхъ чиселъ, такъ что основная операција надъ числами этой области даютъ числа, принадлежащія къ той же области.

Пользуясь изслѣдованиеми §§ 46 и 48, мы весьма просто можемъ геометрически изображать одноосные бикватерніоны и интерпретировать основные операцији надъ ними. Дѣйствительно, построимъ винтъ η параметра нуль ($T\eta = 1$), ось которого пересѣкаеть ось ε подъ прямымъ угломъ. Тогда произвольно выбранный бикватерніонъ $q = T(cs\theta + \varepsilon sn\theta)$, имѣющій ось ε свою осью мы можемъ представить въ видѣ $q = \alpha/\eta$, где α есть бивекторъ, тензоръ котораго $= Tq$ и ось котораго пересѣкаеть ось ε подъ прямымъ угломъ и образуетъ съ осью η относительно направлениія ε комплексный уголъ θ . Если, слѣдовательно, винтъ η будетъ нами выбранъ разъ на всегда, то бикватерніонъ q будетъ вполнѣ опредѣлять бивекторъ α , и обратно, бивекторъ α будетъ вполнѣ опредѣлять бикватерніонъ q . Итакъ бикватерніонъ q мы можемъ изобразить однимъ бивекторомъ α , ось котораго пересѣкаеть ось ε подъ прямымъ угломъ.

Складывая два одноосныхъ бикватерніановъ $q = \alpha/\eta$ и $q' = \beta/\eta$, мы получаемъ бикватерніонъ $q' + q = (\alpha + \beta)/\eta$ который будетъ однооснымъ съ q и q' и будетъ изображаться

суммой бивекторовъ α и β , изображающихъ бикватерніоны q и q' . Точно также найдемъ, что бикватерніанъ $q' - q$ изобразится бивекторомъ $\beta - \alpha$.

Чтобы получить произведение $q'q$, или частное q'/q , мы должны ось бивектора β повернуть вокругъ оси ϵ на комплексный уголъ θ въ положительномъ направлениі въ первомъ случаѣ и въ отрицательномъ—во второмъ и умножить $T\beta$ на $T\alpha$ —въ первомъ случаѣ и раздѣлить $T\beta:T\alpha$ —во второмъ. Эти построения вытекаютъ изъ формулъ (70) и (71); ихъ можно получить также путемъ геометрическихъ соображеній изъ изслѣдовавії § 48. Замѣтимъ, что умноженіе бикватерніана q , изображаемаго бивекторомъ α , на $\epsilon^{a_0+\omega a_1}$ [см. § 28] эквивалентно винтовому перемѣщенію оси α на комплексный уголъ $a_0 + \omega a_1$, благодаря чему

$$\epsilon^{a_0+\omega a_1}$$

мы можемъ назвать винтищимъ факторомъ.

Оси бивекторовъ, которыми мы изображаемъ одноосные бикватерніаны, всѣ пересѣкаютъ подъ прямымъ угломъ ось ϵ и образуютъ, слѣдовательно щетку, [см. § 47]. Такимъ образомъ алгебра одноосныхъ бикватерніоновъ есть алгебра щетки.

Что касается аналитической теоріи одноосныхъ бикватерніоновъ, то мы замѣтимъ, что при операцияхъ надъ ними ϵ играеть роль символа, коммутативнаго съ символомъ ω и обладающаго свойствомъ $\epsilon^2 = -1$. Мы можемъ, поэтому, нисколько не измѣняя аналитической теоріи, замѣнить ϵ черезъ $\sqrt{-1} = i$ и представить бикватерніонъ $q = Tq(cs\theta + isn\theta)$ въ видѣ

$$q = Tq(cs\theta + isn\theta), \quad (72)$$

или, полагая

$$Tqcs\theta = a = a_0 + \omega a_1, Tqsn\theta = b = b_0 + \omega b_1, \quad (73)$$

$$\text{въ видѣ } q = a + bi = a_0 + \omega a_1 + i(b_0 + \omega b_1). \quad (74)$$

Оставаясь, слѣдовательно, въ области одноосныхъ бикватерніоновъ, мы можемъ рассматривать бикватерніонъ какъ обыкновенное комплексное число $a + bi$, у которого коэффи-

центъ при i и вещественная часть суть комплексные числа $a_0 + \omega a_1$ и $b_0 + \omega b_1$ ($\omega^2 = 0$). Тензоръ бикватериона q и его уголъ, опредѣляясь формулами (73), будутъ соответственно модулемъ и аргументомъ числа $a + bi$.

Пока числа a и b остаются вещественными, мы изображаемъ комплексное число $a + bi$ точками плоскости, или, лучше, векторами плоскости, имѣющими общее начало. Алгебра обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ есть алгебра пучка векторовъ. Когда же числа a и b въ свою очередь становятся комплексными: a обращается въ $a_0 + \omega a_1$, b — въ $b_0 + \omega b_1$, то числа $a + bi$ обращаются въ числа $a_0 + \omega a_1 + i(b_0 + \omega b_1)$, которые мы можемъ рассматривать какъ одноосные бикватерионы и изображать бивекторами, оси которыхъ образуютъ щетку. Алгебра такихъ чиселъ есть алгебра щетки.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что между двумя геометрическими формами, пучкомъ и щеткой, должна существовать некоторая аналогія; это заключеніе мы подтверждимъ, действительно, съ слѣдующей главы.

Числа $a_0 + \omega a_1 + i(b_0 + \omega b_1)$ мы можемъ представить также въ видѣ:

$$q = a_0 + ib_0 + \omega(a_1 + ib_1). \quad (75)$$

Въ такой формѣ не трудно узнать въ нихъ тѣ числа, аналитическая теорія которыхъ дана нами въ §§ 18 и 19, ибо въ самомъ началѣ § 18 мы обращали уже вниманіе на то, что въ числахъ вида $c_0 + \omega c_1$ c_0 и c_1 могутъ быть обыкновенными комплексными числами, $c_0 = a_0 + ib_0$, $c_1 = a_1 + ib_1$. Мы можемъ слѣдовательно сказать, что аналитическая теорія одноосныхъ бикватерионовъ дана нами въ §§ 18 и 19.

Наконецъ, мы можемъ рассматривать одноосные бикватерионы какъ комплексные числа съ четырьмя единицами:

$$q = a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, \quad (76)$$

если положимъ $e_0 = 1, e_1 = i, e_2 = \omega, e_3 = \omega i$. Таблицей умноженія для комплексныхъ единицъ e_0, e_1, e_2, e_3 будетъ служить таблица:

$$\begin{array}{ccccc} & e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_0 & e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_1 - e_0 & e_3 - e_2 & & \\ e_2 & e_2 & e_3 & 0 & 0 \\ e_3 & e_3 - e_2 & 0 & 0 \end{array} \quad (77)$$

Итакъ мы можемъ резюмировать сказанное въ этомъ параграфѣ слѣдующимъ образомъ:

Аналитическая теорія комплексныхъ чиселъ вида (74), или (75), или (76) дана нами въ §§ 18 и 19; алгебра этихъ чиселъ есть алгебра щетки бивекторовъ.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

Глава I.

60. *Методъ перенесенія или раздвиженія.* Во второй главѣ первой части мы видѣли, что всѣ формулы теоріи кватерніоновъ мы можемъ разсматривать какъ неразвернутыя формулы теоріи бикватерніоновъ.

Въ третьей главѣ мы показали, что бикватерніоны и основныя операциі надъ ними могутъ быть интерпретированы помощью теоріи винтовъ подобно тому, какъ кватерніоны интерпретируются помощью теоріи векторовъ.

Изъ этихъ положеній вытекаетъ весьма важное и плодотворное, по своимъ результатамъ, слѣдствіе.

Пусть мы имѣемъ нѣкоторую теорему геометріи или механики, которая можетъ быть доказана помощью теоріи кватерніоновъ. Такая теорема выразится однимъ или нѣсколькими равенствами между кватерніонами, и доказать ее это значитъ получить послѣднія изъ основныхъ формулъ теоріи кватерніоновъ помощью нѣкоторыхъ преобразованій. Но формулы теоріи кватерніоновъ суть вмѣстѣ съ тѣмъ и формулы теоріи бикватерніоновъ и послѣднія преобразуются совершенно также какъ и первыя, а потому равенства, выражающія собой разсматриваемую теорему будутъ имѣть мѣсто и въ томъ случаѣ, если мы замѣнимъ въ нихъ кватерніоны бикватерніонами. Слѣдовательно, наша теорема даетъ намъ нѣкоторые равенства между бикватерніонами. Интерпретируя ихъ геометрически, мы получаемъ новую теорему, представляющую обобщеніе первоначально данной.

Итакъ, каждая теорема геометріи или механики, которая можетъ быть доказана помощью теоріи кватерніоновъ допускаетъ обобщеніе въ извѣстномъ направлении. Мы при-

ходимъ къ желаемому обобщенію, если выражимъ теорему въ видѣ равенствъ между кватерніонами и замѣнивъ кватерніоны бикватерніонами, будетъ интерпретировать ихъ помощью теоріи винтовъ.

Эта весьма общая теорема позволяетъ намъ устанавливать аналогіи между нѣкоторыми фигурами и движениіями и фигурами и движениіями болѣе общаго вида и даетъ, такимъ образомъ, методъ переносить свойства первыхъ, обобщая ихъ надлежащимъ образомъ, на послѣднія. Въ виду важнаго значенія этого метода мы позволимъ себѣ дать ему особое название метода перенесенія или раздвиганія. Поводъ къ такому названію мы увидимъ впослѣдствіи, когда ближе познакомимся съ результатами, къ которымъ приводитъ нашъ методъ.

Посвящая эту главу выясненію метода перенесенія, мы по необходимости, чтобы не увеличивать слишкомъ ея размѣръ, ограничимся лишь нѣкоторыми его приложеніями, причемъ мы остановимся на болѣе простыхъ и вмѣстѣ съ тѣмъ наиболѣе важныхъ формулахъ и теоремахъ, съ цѣлью положить, такимъ образомъ, основанія для дальнѣйшихъ изслѣдованій.

61. *Преобразование теоремъ и формулъ геометрии съ элементомъ точки въ формулы и теоремы геометрии съ элементомъ бивектора.* Отметимъ прежде всего важное слѣдствіе теоремы предыдущаго параграфа.

Пусть мы имѣемъ прямоугольную систему координатъ съ началомъ въ точкѣ O , которую мы принимаемъ за точку приведенія, и два бивектора

$$\alpha = xi + yj + zk,$$

$$\beta = x'i + y'j + z'k,$$

гдѣ $x = p + \omega a$, $y = q + \omega b$, $z = r + \omega c$; $x' = p_1 + \omega a_1$, $y' = q_1 + \omega b_1$, $z' = r_1 + \omega c_1$, и p, q, r, a, b, c , $p_1, q_1, r_1, a_1, b_1, c_1$ суть Plückerовы координаты бивекторовъ α и β .

Пользуясь формулой [(25) § 25],

$$T\alpha = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (1)$$

мы получимъ для $T(\beta - \alpha)$ выраженіе

$$\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}. \quad (2)$$

Далѣе, если означимъ черезъ $\theta = \varphi + \omega d$ комплексный уголъ между осами α и β , то формулы [(14) § 35] и [(24) § 37] даютъ намъ равенство:

$$T\alpha T\beta \cos\theta = xx' + yy' + zz', \quad (3)$$

дѣля которое на $T\alpha \cdot T\beta$, мы имѣемъ:

$$\cos\theta = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \quad (4)$$

формулу для опредѣленія комплекснаго угла между двумя пряммыми въ пространствѣ.

Обратимъ вниманіе на формулы (2) и (4).

Если x, y, z и x', y', z' будутъ вещественными числами, и мы примемъ ихъ за координаты двухъ точекъ, то формулы (2) и (4) будутъ основными формулами геометріи: первая опредѣлить разстояніе между точками (x, y, z) и (x', y', z') , а вторая—уголъ между ихъ радиусами векторами.

Если же числа x, y, z , и x', y', z' сдѣлаются комплексными, они опредѣлить два бивектора α и β , и формула (2) дастъ намъ $T(\beta - \alpha)$, а (4)—комплексный уголъ между осами α и β .

Такимъ образомъ, двѣ основныя формулы геометріи эвклидова пространства обращаются въ двѣ основныя формулы теоріи бивекторовъ, тоже эвклидова пространства, если координаты точекъ становятся комплексными числами вида $a_0 + \omega a_1$. Но въ такомъ случаѣ мы можемъ быть увѣрены, что взявъ произвольную формулу геометріи и замѣнивъ всѣ числа, въ нее входящія, комплексными вида $a_0 + \omega a_1$, мы преобразуемъ ее въ формулу, которая будетъ имѣть вполнѣ опредѣленный смыслъ въ теоріи бивекторовъ.

Понятно, что при такихъ преобразованіяхъ линіамъ и поверхностямъ будутъ соотвѣтствовать нѣкоторыя многообразія бивекторовъ и подобно тому, какъ въ нѣкоторыхъ геометрическихъ теоріяхъ линіи и поверхности принимаются за элементы, такъ и многообразія бивекторовъ могутъ быть приняты за индивидуумы болѣе сложныхъ пространствъ. Такъ напримѣръ, теорія винтовъ можетъ быть разсматриваема какъ теорія

пространства, элементомъ котораго служить линейный комплексъ. Линейному комплексу обыкновенного пространства будеть отвѣтать въ пространствѣ бивекторовъ нѣкоторое многообразіе бивекторовъ, принимаю которое въ свою очередь за элементъ мы имѣемъ средство обобщить въ извѣстномъ направлениѣ и самую теорію винтовъ помошью того же метода перенесенія. Мы должны только шесть Plücker'овыхъ координатъ считать комплексными числами вида $a_0 + \omega a_1$. Очевидно, что такого рода обобщенія мы можемъ продолжать какъ угодно далѣко.

Итакъ, когда координаты точки становятся комплексными числами, они опредѣляютъ бивекторъ, и всѣ формулы и уравненія геометріи пространства трехъ измѣреній, основнымъ (исходнымъ) элементомъ котораго служитъ точка, преобразуются въ формулы и уравненія пространства шести измѣреній, основнымъ (исходнымъ) элементомъ котораго служитъ бивекторъ.

62. Преобразование геометріи связки векторовъ въ теорію бивекторовъ. На предъидущую теорему мы можемъ установить иную точку зрѣнія, которая во многихъ случаяхъ позволяетъ намъ съ большимъ удобствомъ пользоваться методомъ перенесенія, чѣмъ точка зрѣнія предъидущаго параграфа.

Вещественные числа $x, y, z; x', y', z'$, которыхъ мы принимали за координаты двухъ точекъ, отнесенныхъ къ прямоугольной системѣ координатъ, суть проекціи радиусовъ векторовъ этихъ точекъ съ общимъ началомъ въ точкѣ O , а потому формулы геометріи съ элементомъ точка могутъ быть рассматриваемы какъ формулы геометріи связки векторовъ.

Когда же числа $x, y, z; x', y', z'$ становятся комплексными, они опредѣляютъ два бивектора, и двѣ основныя формулы геометріи связки, (1) и (4), которыхъ даютъ намъ длину вектора и уголъ между двумя векторами, преобразуются въ двѣ основныя формулы теоріи бивекторовъ.

Итакъ, когда проекціи вектора на оси координатъ становятся комплексными числами, векторъ преобразуется въ бивекторъ, и формулы связки векторовъ—въ формулы теоріи бивекторовъ, причемъ, какъ видно изъ (1) и (4), длина вектора преобразуется въ тензоръ бивектора, а уголъ между векторами—въ комплексный уголъ между осями бивекторовъ.

Перейдемъ теперь къ приложеніямъ этой теоремы.

63. *Проекція винта и бивектора на ось.* Пусть мы имѣмъ винтъ ϵ параметра нуль и бивекторъ $\alpha = \alpha_0 + \omega\alpha$, точка приведенія котораго, предположимъ, находится на оси ϵ . Какъ известно изъ кинематики, проекціи векторовъ α_0 и α_1 на ось ϵ будутъ одинъ и тѣ же, гдѣ бы на оси ϵ ни находилась точка приведенія бивектора α . Комплексное число:

$$[\text{проекція } \alpha_0]_{\epsilon} + \omega [\text{проекція } \alpha_1]_{\epsilon}$$

мы будемъ называть алгебраической проекціей бивектора α , а произведение

$$\epsilon \times [\text{алгебраическая проекція } \alpha]$$

—геометрической проекціей бивектора α на ось ϵ . Въ тѣхъ случаяхъ, когда изъ смысла рѣчи видно, идетъ ли дѣло объ алгебраической или геометрической проекціи, ту и другую, безразлично, будемъ называть просто проекціей.

Винтъ, опредѣляемый геометрической проекціей α будемъ называть проекціей винта, опредѣляемаго бивекторомъ α .

Если $y = \alpha + \beta$, то $y_0 = \alpha_0 + \beta_0$ и $y_1 = \alpha_1 + \beta_1$; слѣдовательно, предположивъ, что точка приведенія бивекторовъ α, β и y находится на оси ϵ , проектируя векторы $\alpha_0, \beta_0, y_0, \alpha_1, \beta_1, y_1$ на ось мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

Проекція суммы бивекторовъ на какуюнибудь ось равняется суммѣ проекцій слагаемыхъ бивекторовъ на ту же ось.

Всего проще опредѣлится проекція бивектора α , если мы за точку приведенія примемъ точку встрѣчи оси ϵ съ линіей кратчайшаго разстоянія между осями α и ϵ . Повторивъ разсужденія § 49, мы найдемъ, что проекціей α на ϵ будетъ

$$Tacs(\alpha\epsilon) = Tacs\theta = T\alpha_0 [cs\varphi + \omega(Pacs\varphi - dsn\varphi)] \quad (5)$$

и ея параметромъ

$$P\alpha - dtg\varphi, \quad (6)$$

гдѣ $(\alpha\epsilon) = \theta = \varphi + \omega d$ есть комплексный уголъ между осями α и ϵ .

Изъ этихъ формулъ слѣдуетъ:

I. Проекція $a\alpha = a \times [\text{проекція } \alpha]$.

II. Параметръ проекціи α будетъ безконечно великъ
1) если $P\alpha = \infty$, и 2) если ось α , не пересѣкая ось ϵ , къ
ней перпендикулярна.

III. Проекція α равняется нулю 1) если $\alpha = 0$ и 2) если
ось α пересѣхаетъ ось ϵ подъ прямымъ угломъ.

IV. Для винтовъ α , проекціи которыхъ на данную ось ϵ
имѣютъ одинъ и тотъ же параметръ u , удовлетворяется
условіе:

$$(Pa - u)cs\varphi - ds\sin\varphi = 0.$$

Слѣдовательно, всѣ винты α взаимны съ винтомъ $\epsilon(1 - \omega i)$
и образуютъ пятичленную группу.

64. Прямоугольные комплексныя координаты бивектора;
координатные винты. Комплексныя числа $x = p + \omega a$, $y = q + \omega b$,
 $z = r + \omega c$ будемъ называть комплексными прямоугольными
координатами бивектора, а винты i, j, k параметра нуль, имѣю-
щие своими осями оси координатъ—координатными винтами.

Припоминая, что p, q, r суть проекціи главнаго вектора,
 a_0 , а a, b, c проекціи момента бивектора, α , для точки приведенія
въ началѣ координатъ, легко видѣть, что $x = p + \omega a$, $y = q + \omega b$,
 $z = r + \omega c$ будутъ ничто иное какъ проекціи бивектора на ко-
ординатныя оси.

Итакъ, прямоугольные комплексныя координаты бивектора
равны его соотвѣтствующимъ проекціямъ на оси координатъ.

Изъ этой теоремы слѣдуетъ:

I. Всякій бивекторъ разлагается на сумму трехъ его
проекцій на координатныя оси: $\alpha = xi + yj + zk$.

II. Если ось бивектора α пересѣкаетъ ось z подъ прямымъ
угломъ, то, какъ видно изъ слѣдствія III предыдущаго
параграфа, $z = 0$ и $\alpha = xi + yj$. Означимъ чрезъ θ комплексный
уголъ между осями x и α относительно направлениія оси z ;
тогда уголъ между α и y будетъ $\theta - \pi/2$ и по формулѣ (5) $\alpha =$
 $T\alpha(cs\theta i + sn\theta j)$. Такимъ образомъ бивекторъ α , ось котораго
пересѣкаетъ подъ прямымъ угломъ одну изъ трехъ взаимно
перпендикулярныхъ, имѣющихъ общую точку, линій, можетъ
быть разложенъ на сумму его проекцій на двѣ другія линіи.

III. Пусть $\theta_1 = \varphi_1 + \omega d_1$, $\theta_2 = \varphi_2 + \omega d_2$, $\theta_3 = \varphi_3 + \omega d_3$ суть
комплексныя углы, которые ось α образуетъ съ осями коорди-

нать; по формулѣ (5), мы будемъ имѣть

$$\begin{aligned}x &= T \alpha \cos \theta_1, \\y &= T \alpha \cos \theta_2, \\z &= T \alpha \cos \theta_3,\end{aligned}\tag{7}$$

Отсюда, пользуясь формулой

$$\begin{aligned}\cos \theta_1 &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\T \alpha = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \text{получим} \quad \cos \theta_2 &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\&\cos \theta_3 = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.\end{aligned}\tag{8}$$

Формулы (7) даютъ намъ возможность по даннымъ $T \alpha$, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, опредѣлить прямоугольныи и Plücker'овы координаты бивектора, формулы (8) — обратно отъ Plücker'овыхъ или прямоугольныхъ координатъ перейти къ $T \alpha, \theta_1, \theta_2, \theta_3$. Практически, при решеніи этихъ задачъ мы должны будемъ пользоваться развернутыми формулами (7):

$$\begin{aligned}p &= T \alpha \cos \varphi_1, & Px = a:p = Pa - d_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \\q &= T \alpha \cos \varphi_2, & Py = b:q = Pa - d_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \\r &= T \alpha \cos \varphi_3, & Pz = c:r = Pa - d_3 \operatorname{tg} \varphi_3.\end{aligned}\tag{9}$$

IV. Координаты винта параметра нуль суть ничто иное какъ косинусы комплексныхъ угловъ между его осью и осями координатъ. Это видно изъ формулъ (7), если мы положимъ въ нихъ $T \alpha = 1$.

Предъидущія формулы ($Pa = 0$) даютъ намъ возможность определить положеніе прямой комплексными углами, которые она образуетъ съ осями координатъ. Эти углы не могутъ быть выбраны совершенно произвольно, они связаны между собой соотношеніемъ

$$\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3 = 1,\tag{10}$$

которое вытекаетъ формула (8) и, будучи развернуто, распадается на два равенства:

$$\begin{aligned} cs^2\varphi_1 + cs^2\varphi_2 + cs^2\varphi_3 &= 1, \\ d_1 sn2\varphi_1 + d_2 sn2\varphi_2 + d_3 sn2\varphi_3 &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Первое изъ нихъ представляетъ хорошо известное равенство аналитической геометрии; второе даетъ любопытную зависимость между тремя углами, которые какаянибудь прямая образуетъ съ осями координатъ и тремя кратчайшими расстояниями ея отъ координатныхъ осей. Изъ шести величинъ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, d_1, d_2, d_3$, опредѣляющихъ положеніе прямой независимы такимъ образомъ только 4, и следовательно всѣ онѣ могутъ быть выражены въ функции четырехъ независимыхъ переменныхъ. Мы покажемъ въ § 67, что подобно тому, какъ въ аналитической геометрии направление прямой опредѣляется двумя полярными координатами, такъ и положеніе прямой въ пространствѣ можетъ быть опредѣлено двумя комплексными углами, посредствомъ которыхъ углы $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ выражаются такъ, что уравненія (11), или эквивалентное имъ (10), тождественно удовлетворяются.

V. Предполагая, что $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ суть комплексные углы, которые ось бикватерниона $q = Tq(cs\theta + \epsilon sn\theta)$ образуетъ съ осями координатъ, мы получаемъ для q выражение

$$q = Tq[cs\theta + (ics\theta_1 + jcs\theta_2 + kcs\theta_3)sn\theta], \quad (12)$$

сравнивая которое съ выражениемъ $q = w + ix + jy + kz = w_0 + \omega\omega_1 + (x_0 + \omega x_1)i + (y_0 + \omega y_1)j + (z_0 + \omega z_1)k$ мы приходимъ къ слѣдующимъ формуламъ:

$$\begin{aligned} x &= Tqsn\theta cs\theta_1, \\ y &= Tqsn\theta cs\theta_2, \quad w = Tqcs\theta, \\ z &= Tqsn\theta cs\theta_3, \end{aligned} \quad (13)$$

или, въ развернутомъ видѣ,

$$\begin{aligned} x_0 &= Tq_0 sn\varphi_1 cs\varphi_1, \quad x_1 : x_0 = Fq + d_1 ctg\varphi - d_1 tg\varphi_1, \\ y_0 &= Tq_0 sn\varphi_2 cs\varphi_2, \quad y_1 : y_0 = Fq + d_2 ctg\varphi - d_2 tg\varphi_2, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} z_0 &= Tq_0 \sin \varphi \cos \vartheta_3, & z_1 : z_0 &= Pq + d \cot g \varphi - d_3 \tan \varphi, \\ w_0 &= Tq_0 \sin \varphi, & w_1 : w_0 &= Pq - d \tan \varphi. \end{aligned} \quad (14)$$

Эти формулы дают возможность по даннымъ w, x, y, z , опредѣлить $Tq, \theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ и наоборотъ. Въ частномъ случаѣ $d = 0, \varphi = \pi/2$ они обращаются въ (9).

65. *Геометрическое произведение двухъ бивекторовъ. Законъ дистрибутивности скалярного умноженія.* Въ виду важнаго для насъ значенія формулы (3) мы покажемъ теперь, какимъ образомъ она можетъ быть получена, если мы воспользуемся понятіемъ проекціи и формулами предъидущаго параграфа.

Комплексное число $T\alpha T\beta \cos \theta$ мы будемъ называть геометрическимъ произведеніемъ бивекторовъ α и β ; изъ формулы (24) § 37 видно, что скалярное произведеніе равнается геометрическому произведенію, взятыму со знакомъ минусъ.

Геометрическое произведеніе мы можемъ рассматривать какъ произведеніе $T\beta$ на проекцію α на ось β , или какъ произведеніе $T\alpha$ на проекцію β на ось α . Такъ какъ бивекторъ $\beta = x'i + y'j + z'k$ есть сумма трехъ бивекторовъ $x'i, y'j, z'k$, то по теоремѣ § 63 мы имѣемъ для проекціи β на ось α :

$$T\beta \cos \theta = x' \cos \theta_1 + y' \cos \theta_2 + z' \cos \theta_3; \quad (15)$$

откуда, умноживъ обѣ части на $T\alpha$ и пользуясь формулами (7), находимъ

$$T\alpha T\beta \cos \theta = xx' + yy' + zz'. \quad (3)$$

Эта формула будучи развернута даетъ намъ двѣ формулы

$$T\alpha_0 T\beta_0 \cos \varphi = pp_1 + qq_1 + rr_1, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} T\alpha_0 T\beta_0 [(P\alpha + F\beta) \cos \varphi - ds \sin \varphi] &= \\ &= pa_1 + qb_1 + rc_1 + p_1 a + q_1 b + r_1 c, \end{aligned} \quad (17)$$

изъ которыхъ первая есть основная формула аналитической геометріи, а вторая—теоріи винтовъ.

Если мы означимъ комплексные углы оси β съ осами координатъ черезъ $\theta'_1 = \varphi'_1 + \omega d'_1$, $\theta'_2 = \varphi'_2 + \omega d'_2$, $\theta'_3 = \varphi'_3 +$

$\omega d_s'$, то изъ (3), мы получимъ равенство

$$cs\theta = cs\theta_1 cs\theta_1' + cs\theta_2 cs\theta_2' + cs\theta_3 cs\theta_3', \quad (18)$$

развернувъ которое, будемъ имѣть

$$cs\varphi = cs\varphi_1 cs\varphi_1' + cs\varphi_2 cs\varphi_2' + cs\varphi_3 cs\varphi_3', \quad (19)$$

$$\begin{aligned} dsn\varphi = & d_1 sn\varphi_1 cs\varphi_1' + d_2 sn\varphi_2 cs\varphi_2' + d_3 sn\varphi_3 cs\varphi_3' \\ & + d_1' sn\varphi_1' cs\varphi_1 + d_2' sn\varphi_2' cs\varphi_2 + d_3' sn\varphi_3' cs\varphi_3, \end{aligned} \quad (20)$$

формулы для определенія угла и кратчайшаго разстоянія между двумъ прямымъ, осами бивекторовъ α и β , по даннымъ комплекснымъ угламъ, которые эти прямые образуютъ съ осами координатъ. Пользуясь ими, мы получаемъ для возможнаго коэффиціента винтовъ α и β [такъ называется выражение, стоящее въ квадратныхъ скобкахъ въ лѣвой части формулы (17)] такое выражение:

$$\begin{aligned} 2\omega_{\alpha\beta} = & cs\varphi_1 cs\varphi_1' (P\alpha + P\beta - d_1 t g \varphi_1 - d_1' t g \varphi_1') \\ & + cs\varphi_2 cs\varphi_2' (P\alpha + P\beta - d_2 t g \varphi_2 - d_2' t g \varphi_2') \\ & + cs\varphi_3 cs\varphi_3' (P\alpha + P\beta - d_3 t g \varphi_3 - d_3' t g \varphi_3'), \end{aligned} \quad (21)$$

т. е. возможный коэффиціентъ двухъ бивекторовъ (винтовъ) равнается суммѣ произведеній косинусовъ угловъ, которые ихъ оси образуютъ съ осами координатъ, умноженныхъ на суммы параметровъ проекцій бивекторовъ на соотвѣтствующія оси.

Проектируя бивекторъ $\gamma = \alpha + \beta$ на ось бивектора δ , мы получаемъ, по теоремѣ § 63 и формулѣ (5), равенство

$$T\gamma cs(\gamma\delta) = T\alpha cs(\alpha\delta) + T\beta cs(\beta\delta),$$

которое, по умноженію на $T\delta$, даетъ

$$S\gamma\delta = S(\alpha + \beta)\delta = S\alpha\delta + S\beta\delta,$$

законъ дистрибутивности скалярнаго умноженія. Итакъ законъ дистрибутивности скалярнаго умноженія выра-

жаетъ то же самое, что и теорема § 63 относительно проекціи суммы бивекторовъ на ось.

Мы видимъ теперь, какимъ образомъ можетъ быть доказана геометрически формула (51) § 49.

66. *Щетка и ея ось, ортогональная проекція бивектора на щетку. Законъ дистрибутивности векторного умноженія и обобщеніе теоремы Varignon'a.* Напомнимъ, что щеткой [§ 47] мы условились называть геометрическую форму, которую образуетъ совокупность прямыхъ, пересѣкающихъ одну и ту же прямую ϵ подъ прямымъ угломъ. Прямую ϵ , которой мы будемъ приписывать определенное направление, принимая ее за ось винта ϵ параметра нуль, будемъ называть осью щетки.

Построимъ два винта параметра нуль, α и α_{\parallel} . Ось первого есть линія кратчайшаго разстоянія между осами α и ϵ и направлена отъ точки O' пересѣченія ея съ осью ϵ въ точкѣ пересѣченія съ осью α . Ось втораго проходитъ черезъ O' , перпендикулярна къ осамъ α и ϵ и имѣеть такое направление, относительно которого уголъ между α и ϵ равенъ $+\pi/2$. По слѣдствію II § 64 бивекторъ α разложится на сумму двухъ бивекторовъ:

$$\alpha = T \operatorname{acs}(\alpha \epsilon) \epsilon + T \operatorname{asn}(\alpha \epsilon) \alpha_{\parallel} = \alpha' + \alpha''. \quad (22)$$

Бивекторъ α'' , ось которого принадлежитъ щеткѣ ϵ будемъ называть ортогональной проекціей бивектора α на щетку ϵ . Бивекторъ α' есть проекція α на ось ϵ ; слѣдовательно, всякий бивекторъ разлагается на сумму двухъ его проекцій: на щетку и на ея ось.

Докажемъ слѣдующее свойство проекцій на щетку.

Проекція суммы бивекторовъ на щетку равняется суммѣ проекцій слагаемыхъ бивекторовъ на ту же щетку.

Дѣйствительно, пусть $y = \alpha + \beta$. По предыдущему, означивъ проекціи бивекторовъ α, β, y на ось ϵ черезъ α', β', y' и проекціи ихъ на щетку ϵ черезъ α'', β'', y'' , мы будемъ имѣть $\alpha = \alpha' + \alpha'', \beta = \beta' + \beta'', y = y' + y''$ и, въ силу предположенія $y = \alpha + \beta$,

$$y' + y'' = \alpha' + \alpha'' + \beta' + \beta''.$$

Но, по теоремѣ § 63, $y' = \alpha' + \beta'$, а потому

$$\gamma'' = \alpha'' + \beta'',$$

что и требовалось доказать.

Если мы повернемъ оси бивекторовъ $\alpha'', \beta'', \gamma''$, не измѣня ихъ тензоровъ, вокругъ оси ϵ на прямой уголъ, то получимъ бивекторы $T\alpha s n(\alpha \epsilon) \alpha_1 = V\alpha \epsilon, T\beta s n(\beta \epsilon) \beta_1 = V\beta \epsilon$, и $T\gamma s n(\gamma \epsilon) \gamma_1 = V\gamma \epsilon$, причемъ, такъ какъ относительное положение осей $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ таково же какъ и осей α, β, γ , изъ равенства $\gamma'' = \alpha'' + \beta''$ будетъ слѣдовать:

$$T\gamma s n(\gamma \epsilon) \gamma_1 = T\alpha s n(\alpha \epsilon) \alpha_1 + T\beta s n(\beta \epsilon) \beta_1.$$

Отсюда, умноживъ обѣ части на какоенибудь число $a = a_0 + \omega a_i$ и положивъ $\delta = a \epsilon$, приходимъ къ равенству:

$$V\gamma \delta = V(a + \beta) \delta = V\alpha \delta + V\beta \delta,$$

выражающему законъ дистрибутивности векторного умножения. Мы имѣемъ, такимъ образомъ, геометрическое доказательство этого закона, а слѣдовательно и формулы (52) § 49 и видимъ, что

законъ дистрибутивности векторного умножения выражаетъ то же самое, что и вышедшая теорема относительно проекціи суммы бивекторовъ на щетку.

Если мы припомнимъ известное обобщеніе теоремы Varignon'a: моментъ относительно точки суммы векторовъ съ общимъ началомъ равняется суммѣ моментовъ слагаемыхъ векторовъ относительно той же точки, то легко будетъ видѣть, что

законъ дистрибутивности векторного умножения мы можемъ рассматривать какъ дальнѣйшее обобщеніе теоремы Varignon'a.

67. Полярныя координаты бивектора. Если $\vartheta = \vartheta_0 + \omega \vartheta_i$ есть комплексный уголъ между осями α и k , то по предыдущему параграфу $\alpha = T\alpha(k c s \vartheta + i s n \vartheta)$, где $T\alpha s n \vartheta_i'$ есть проекція α на щетку k , а $T\alpha c s \theta k$ проекція α на ея ось. Означивъ, далѣе, черезъ $\psi = \psi_0 + \omega \psi_i$, комплексный уголъ между i и ϵ относительно направлена k по слѣдствію II § 64 разложимъ i' на сумму $i c s \psi + j s n \psi$ и будемъ имѣть

$$\alpha = T\alpha(i s n \vartheta c s \psi + j s n \vartheta s n \psi + k c s \psi),$$

$$\begin{array}{ll} \text{i} & x = T a s n \vartheta c s \psi, \\ & y = T a s n \vartheta s n \psi, \quad (23) \\ & z = T a c s \vartheta, \end{array} \quad \begin{array}{ll} c s \theta_1 = s n \vartheta c s \psi, \\ c s \theta_2 = s n \vartheta s n \psi, \quad (24) \\ c s \theta_3 = c s \vartheta. \end{array}$$

Первая группа формулъ вполнѣ аналогична съ хорошо известными формулами преобразование полярныхъ координатъ въ прямоугольныя и показываютъ намъ, что бивекторъ α можетъ быть определенъ тремя комплексными числами, его тензоромъ и двумя комплексными углами ϑ и ψ , числами, которыхъ мы можемъ назвать его полярными координатами. Равнвнувшись эти формулы, мы имѣемъ:

$$\begin{array}{ll} p = T a_s n \vartheta_0 c s \psi_0, & a:p = P \alpha + \vartheta_1 c t g \vartheta_0 - \psi_1 t g \psi_0, \\ q = T a_s n \vartheta_0 s n \psi_0, & b:q = P \alpha + \vartheta_1 c t g \vartheta_0 + \psi_1 c t g \psi_0, \quad (25) \\ r = T a_s c s \vartheta_0, & c:r = P \alpha - \vartheta_1 t g \vartheta_0. \end{array}$$

Этими формулами мы должны пользоваться практически, если захотимъ отъ прямоугольныхъ, или Plücker'овыихъ координатъ перейти къ полярнымъ и наоборотъ отъ полярныхъ къ прямоугольнымъ.

68. *Формулы преобразования прямоугольныхъ координатъ.* Возьмемъ какихъ либо три винта i', j', k' параметра нуль, оси которыхъ пересѣкаются въ одной точкѣ O' подъ прямыми углами и выберемъ направлениа ихъ такимъ образомъ, чтобы $j'k' = i'$, $k'i' = j'$, $i'j' = k'$. Пусть координаты винтовъ i', j', k' , равные какъ мы знаемъ косинусамъ комплексныхъ угловъ, которые оси i', j', k' образуютъ съ осями i, j, k даются слѣдующей таблицей:

$$\begin{array}{lll} i & j & k \\ i' & l_1 = \lambda_1 + \omega \xi_1 & m_1 = \mu_1 + \omega \eta_1 \quad n_1 = v_1 + \omega \zeta_1 \\ j' & l_2 = \lambda_2 + \omega \xi_2 & m_2 = \mu_2 + \omega \eta_2 \quad n_2 = v_2 + \omega \zeta_2 \\ k' & l_3 = \lambda_3 + \omega \xi_3 & m_3 = \mu_3 + \omega \eta_3 \quad n_3 = v_3 + \omega \zeta_3 \end{array} \quad (26)$$

Такъ какъ $T i' = T j' = T k' = 1$, и оси i', j', k' пересѣкаются подъ прямыми углами, то между ними будутъ существовать соотношения [см. (1) и (3) § 61]:

$$\begin{aligned} l_s^2 + m_s^2 + n_s^2 &= 1, \\ l_s l_u + m_s m_u + n_s n_u &= 0, \quad (s,u=1,2,3; s \neq u) \end{aligned} \quad (27)$$

и еще цѣлый рядъ другихъ $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$, $l_1 = m_2 n_3 - m_3 n_2$, и т. д., аналогичныхъ извѣстнымъ соотношеніямъ аналитической геометріи между косинусами угловъ, образуемыхъ старыми и новыми осями.

Означимъ новые координаты бивектора α относительно координатныхъ винтовъ i', j', k' черезъ $x' = p' + \omega a'$, $y' = q' + \omega b'$, $z' = r' + \omega c'$ и найдемъ зависимость между ними и старыми координатами x, y, z . По § 64 x', y', z' суть проекціи бивектора α на оси новыхъ координатныхъ винтовъ; поэтому, пользуясь формулой (3) § 65, мы имѣемъ:

$$\begin{aligned} x' &= xl_1 + ym_1 + zn_1, \\ y' &= xl_2 + ym_2 + zn_2, \\ z' &= xl_3 + ym_3 + zn_3. \end{aligned} \quad (28)$$

Отсюда, при помощи соотношений (27), легко найдемъ формулы для обратного перехода отъ x', y', z' къ x, y, z . Формулы (27) и (28) аналогичны формуламъ преобразованія Декартовыхъ координатъ. Разворачивая ихъ, получаемъ:

$$\begin{aligned} \lambda_s^2 + \mu_s^2 + \nu_s^2 &= 1, \\ \lambda_s \xi_s + \mu_s \gamma_s + \nu_s \zeta_s &= 0, \\ \lambda_s \lambda_u + \mu_s \mu_u + \nu_s \nu_u &= 0, \quad (s,u=1,2,3; s \neq u) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\lambda_s \xi_u + \mu_s \gamma_u + \nu_s \zeta_u + \lambda_u \xi_s + \mu_u \gamma_s + \nu_u \zeta_s = 0;$$

$$\begin{aligned} p' &= p\lambda_1 + q\mu_1 + rv_1, \quad a' = p\xi_1 + q\gamma_1 + r\zeta_1 + a\lambda_1 + b\mu_1 + cv_1, \\ q' &= p\lambda_2 + q\mu_2 + rv_2, \quad b' = p\xi_2 + q\gamma_2 + r\zeta_2 + a\lambda_2 + b\mu_2 + cv_2, \\ r' &= p\lambda_3 + q\mu_3 + rv_3, \quad c' = p\xi_3 + q\gamma_3 + r\zeta_3 + a\lambda_3 + b\mu_3 + cv_3. \end{aligned} \quad (30)$$

Мы предполагали, что положеніе новой системы координатъ задано координатами винтовъ i', j', k' . Обыкновенно, однако, оно предѣляется координатами нового начала $O'(l, m, n)$ и косинусами угловъ между старыми и новыми осями. Но отъ этихъ данныхъ легко перейти къ предѣдущимъ, ибо величины

λ_s, μ_s, ν_s , ($s=1, 2, 3$) суть косинусы угловъ между старыми и новыми осями, величины же ξ_s, η_s, ζ_s —моменты векторовъ, по длини равныхъ единицъ и лежащихъ на новыхъ осяхъ координатъ, относительно старыхъ осей и слѣдовательно

$$\xi_s = m\nu_s - n\mu_s, \quad \eta_s = n\lambda_s - l\nu_s, \quad \zeta_s = m\lambda_s - l\mu_s. \quad (31)$$

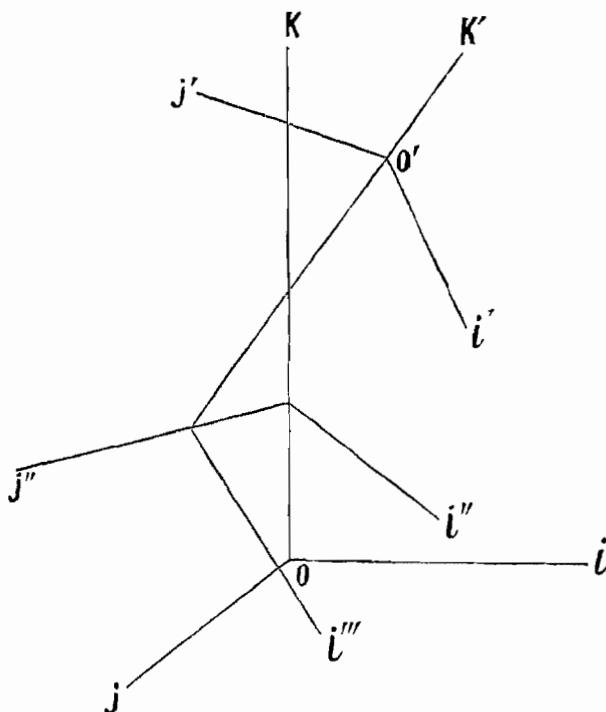
Если мы внесемъ эти значения ξ_s, η_s, ζ_s , въ формулы (30), то онъ обратятся въ тѣ формулы для общаго случая преобразованія Plücker'овыхъ координатъ, которые, какъ мы указывали, получаются комбинаціей формулъ (3) и (4) § 2.

Въ силу 12 соотношеній (29) между 18 координатами $\lambda_s, \mu_s, \nu_s, \xi_s, \eta_s, \zeta_s$, ($s=1, 2, 3$), эти послѣднія могутъ быть выражены безчисленнымъ множествомъ способовъ въ функції 6 независимыхъ перемѣнныхъ. Между прочимъ, мы получаемъ для нихъ такія выраженія, если за независимыя перемѣнныя примемъ три координаты нового начала и какіе либо три параметра, помошью которыхъ выражаются косинусы угловъ λ_s, μ_s, ν_s ($s=1, 2, 3$), напримѣръ три Euler'овыхъ угла или три параметра формулъ Rodrigues-Euler'a, и затѣмъ воспользуемся соотношеніями (31).

Мы приходимъ, однако, къ формуламъ болѣе интереснымъ, если обратимъ вниманіе на то, что девять комплексныхъ чиселъ l_s, m_s, n_s ($s=1, 2, 3$) связаны между собой шестью уравненіями (27) и слѣдовательно могутъ быть выражены въ функції трехъ изъ нихъ, или въ функції трехъ независимыхъ между собой комплексныхъ чиселъ такъ, что уравненія (27), или эквивалентныя имъ (29), будутъ тождественно удовлетворены. Вслѣдствіе аналогіи уравненій (27) съ известными уравненіями аналитической геометріи, мы можемъ составить такія выраженія для l_s, m_s, n_s ($s=1, 2, 3$) двухъ типовъ: или выраженія аналогичныя формуламъ Euler'a, или—формуламъ Rodrigues-Euler'a.

69. *Обобщеніе формулъ Euler'a.* Чтобы получить обобщенные формулы Euler'a, построимъ сначала линію j'' кратчайшаго разстоянія между осями k и k' , а потомъ прямые i'' и i''' , изъ которыхъ первая пересѣкаетъ подъ прямыми углами j'' и k , а вторая j'' и k' . Тогда легко будетъ видѣть, что положеніе системы i'', j'', k' можетъ быть опредѣлено тремя комплексными углами: угломъ $\psi = \psi_0 + \omega\psi_1$ между осями i и i'' ,

угломъ $\vartheta = \vartheta_0 + \omega t$, между осями k и k' и наконецъ угломъ $\varphi = \varphi_0 + \omega t$, между осями i''' и i' .



Означимъ винты параметра нуль, которые имѣютъ своими осями i'', j'', i''' соответѣственно тѣми же буквами; тогда, по слѣдствію II § 64, мы будемъ имѣть равенства:

$$\begin{aligned} i'' &= i \cos \psi + j \sin \psi, \quad i''' = i'' \cos \vartheta - k \sin \vartheta, \quad i' = i''' \cos \varphi + j'' \sin \varphi, \\ j'' &= -i \sin \psi + j \cos \psi, \quad k' = i'' \sin \vartheta + k \cos \vartheta, \quad j' = -i''' \sin \varphi + j'' \cos \varphi. \end{aligned} \quad (32)$$

Исключая изъ нихъ послѣдовательной подстановкой i'' , j'', i''' мы выразимъ i', j', k' линейно черезъ i, j, k , причемъ коэффиціентами при послѣднихъ и будутъ искомые косинусы комплексныхъ угловъ между старыми и новыми осями. Изъ девяти, полученныхъ такимъ образомъ выражений для l_s, m_s, n_s ($s = 1, 2, 3$), мы выпишемъ только три:

$$\begin{aligned} l_1 &= -sn\varphi sn\psi + cs\varphi cs\psi cs\vartheta, \\ m_1 &= \quad sn\varphi cs\psi + cs\varphi sn\psi cs\vartheta, \\ n_1 &= -cs\varphi sn\vartheta, \end{aligned} \quad (33)$$

или, въ развернутомъ видѣ:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -sn\varphi_0 sn\psi_0 + cs\varphi_0 cs\psi_0 cs\vartheta_0, \\ \mu_1 &= \quad sn\varphi_0 cs\psi_0 + cs\varphi_0 sn\psi_0 cs\vartheta_0, \\ \nu_1 &= -cs\varphi_0 sn\vartheta_0, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\varphi_1(cs\varphi_0 sn\psi_0 + sn\varphi_0 cs\psi_0 cs\vartheta_0) \\ &\quad - \psi_1(sn\varphi_0 cs\psi_0 + cs\varphi_0 sn\psi_0 cs\vartheta_0) - \vartheta_1 cs\varphi_0 cs\psi_0 sn\vartheta_0, \\ \eta_1 &= \varphi_1(cs\varphi_0 cs\psi_0 - sn\varphi_0 sn\psi_0 cs\vartheta_0) \\ &\quad - \psi_1(sn\varphi_0 sn\psi_0 - cs\varphi_0 cs\psi_0 cs\vartheta_0) - \vartheta_1 cs\varphi_0 sn\psi_0 sn\vartheta_0, \\ \zeta_1 &= \varphi_1 sn\varphi_0 sn\vartheta_0 - \vartheta_1 cs\varphi_0 cs\vartheta_0, \end{aligned} \quad (35)$$

замѣчая, что формулы для $l_2, m_2, n_2; \lambda_2, \mu_2, \nu_2, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ получаются изъ нихъ, если φ замѣнимъ черезъ $\varphi + 90^\circ$, и формулы для $l_3, m_3, n_3; \lambda_3, \mu_3, \nu_3, \xi_3, \eta_3, \zeta_3$ — если ϑ и φ замѣнимъ черезъ $\vartheta - 90^\circ$ и 0 . Формулы для ξ_3, η_3, ζ_3 мы можемъ представить короче въ такомъ видѣ:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \varphi_1 \lambda_2 - \psi_1 \mu_2 - \vartheta_1 cs\varphi_0 \lambda_3, \quad \xi_2 = -\varphi_1 \lambda_1 - \psi_1 \mu_1 + \vartheta_1 sn\varphi_0 \lambda_3, \\ \eta_1 &= \varphi_1 \mu_2 + \psi_1 \lambda_1 - \vartheta_1 cs\varphi_0 \mu_3, \quad \eta_2 = -\varphi_1 \mu_1 + \psi_1 \lambda_2 + \vartheta_1 sn\varphi_0 \mu_3, \\ \zeta_1 &= \varphi_1 \nu_2 \quad - \vartheta_1 cs\varphi_0 \nu_3, \quad \zeta_2 = -\varphi_1 \nu_1 \quad + \vartheta_1 sn\varphi_0 \nu_3, \\ \xi_3 &= -\psi_1 \mu_3 + \vartheta_1 cs\vartheta_0 cs\psi_0, \\ \eta_3 &= \psi_1 \lambda_3 + \vartheta_1 cs\vartheta_0 sn\psi_0, \\ \zeta_3 &= \quad -\vartheta_1 sn\vartheta_0. \end{aligned} \quad (36)$$

Чтобы по даннымъ $\lambda_s, \mu_s, \nu_s, \xi_s, \eta_s, \zeta_s$ ($s = 1, 2, 3$) найти комплексные Euler'овы углы, мы должны найти сначала изъ формулъ для λ_s, μ_s, ν_s ($s = 1, 2, 3$) углы φ_0, ψ_0 и ϑ_0 , а затѣмъ, внеся ихъ значения въ формулы (36), мы будемъ имѣть 9 уравнений, которыми мы можемъ воспользоваться для определенія φ_1, ϑ_1 и ψ_1 , комбинируя ихъ между собой различными обра-

зомъ. Такъ напримѣръ, мы получаемъ изъ нихъ такія формулы:

$$\begin{aligned}\vartheta_1 \operatorname{sn} \vartheta_0 &= -\zeta_3 \\ \psi_1 \operatorname{sn}^2 \vartheta_0 &= \lambda_s \eta_s - \mu_s \xi_s \\ \varphi_1 + \psi_1 \operatorname{cs} \vartheta_0 &= \lambda_s \xi_1 + \mu_s \eta_1 + v_s \zeta_1\end{aligned}\quad (37)$$

Если $\vartheta_0 = 0$, то выраженія для $\lambda_s, \mu_s, v_s, \xi_s, \eta_s, \zeta_s$ ($s = 1, 2, 3$) принимаютъ видъ

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \operatorname{cs}(\varphi_0 + \psi_0) & \lambda_s &= -\operatorname{sn}(\varphi_0 + \psi_0) & \lambda_3 &= 0 \\ \mu_1 &= \operatorname{sn}(\varphi_0 + \psi_0) & \mu_s &= \operatorname{cs}(\varphi_0 + \psi_0) & \mu_3 &= 0 \\ v_1 &= 0 & v_s &= 0 & v_3 &= 1\end{aligned}\quad (38)$$

$$\begin{aligned}\xi_1 &= -(\varphi_1 + \psi_1) \operatorname{sn}(\varphi_0 + \psi_0) & \xi_2 &= -(\varphi_1 + \psi_1) \operatorname{cs}(\varphi_0 + \psi_0) \\ \eta_1 &= (\varphi_1 + \psi_1) \operatorname{cs}(\varphi_0 + \psi_0) & \eta_2 &= -(\varphi_1 + \psi_1) \operatorname{sn}(\varphi_0 + \psi_0) \\ \zeta_1 &= -\vartheta_1 \operatorname{cs} \varphi_0 & \zeta_2 &= \vartheta_1 \operatorname{sn} \varphi_0 \\ && \xi_s &= \vartheta_1 \operatorname{cs} \psi_0 \\ && \tau_3 &= \vartheta_1 \operatorname{sn} \psi_0 \\ && \zeta_s &= 0,\end{aligned}\quad (39)$$

Въ этомъ случаѣ, какъ видимъ, перемѣнныя φ_1 и ψ_1 сливаются въ одну $\varphi_1 + \psi_1$: такъ оно и должно быть, ибо при $\vartheta_0 = 0$ положеніе новой системы координатъ вполнѣ опредѣляется четырьма величинами. Почему именно φ_1 и ψ_1 , а не какія нибудь другія изъ перемѣнныхъ $\varphi_0, \psi_0, \vartheta_0, \varphi_1, \psi_1, \vartheta_1$ сливаются сдѣлается понятнымъ, если мы припомнимъ геометрическое значеніе угловъ φ и ψ .

Наконецъ, если $\vartheta = \vartheta_0 + \omega \vartheta_1 = 0$ и оси k и k' совпадаютъ, то λ_s, μ_s, v_s ($s = 1, 2, 3$) будутъ опредѣляться прежними формулами (38), формулы же (39) обратятся въ слѣдующія:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= -(\varphi_1 + \psi_1) \operatorname{sn}(\varphi_0 + \psi_0) & \xi_2 &= -(\varphi_1 + \psi_1) \operatorname{cs}(\varphi_0 + \psi_0) \\ \eta_1 &= (\varphi_1 + \psi_1) \operatorname{cs}(\varphi_0 + \psi_0) & \eta_2 &= -(\varphi_1 + \psi_1) \operatorname{sn}(\varphi_0 + \psi_0) \\ \xi_s &= \zeta_1 = 0 & & \\ \tau_s &= \zeta_2 = 0 = \zeta_3\end{aligned}\quad (40)$$

Въ этомъ случаѣ въ формулы входятъ только $\varphi_1 + \psi_1$ и $\varphi_0 + \psi_0$, ибо положеніе новой системы координатъ опредѣляется комплекснымъ угломъ $\varphi + \psi$ между осями i и i' .

Предположимъ теперь, что бивекторъ α принадлежить щеткѣ k . Тогда его координата z , а если ось k' совпадаетъ съ осью k , то и координата z' будутъ равны нулю. Поэтому, означивъ комплексный уголъ между осями i' и i , которымъ опредѣлится положеніе новой системы координатъ, черезъ ψ , мы будемъ имѣть слѣдующія формулы:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \psi + y \sin \psi, \\ y' &= -x \sin \psi + y \cos \psi, \end{aligned} \quad (41)$$

преобразованія координатъ бивектора α щетки k , въ томъ предположеніи, что какъ старыя, такъ и новые оси координатъ i, j и i', j' принадлежать той же щеткѣ. Онѣ вполнѣ аналогичны формуламъ преобразованія Декартовыхъ координатъ на плоскости.

Предоставляемъ читателю самому развернуть послѣднія формулы, а также убѣдиться, что данныя наши выраженія для $\lambda_s, \mu_s, v_s, \xi_s, r_s, \zeta_s$ ($s = 1, 2, 3$) тожественно удовлетворяютъ соотношеніямъ (29) § 68.

70. *Операциія* $q(\)q^{-1}$. Прежде чѣмъ мы обратимся къ выводу обобщенныхъ формулъ Rodrigues-Euler'a, мы познакомимся съ операцией $q(\)q^{-1}$, которая аналогична операциіи, играющей важную роль въ теоріи кватерніоновъ.

Пусть мы имѣемъ бикватерніоны $q = Tq(\cos \theta + \epsilon s n \theta)$ и g . Разсматривая зависимость между g и $g' = q g q^{-1}$, операциою, которая преобразуетъ бикватерніонъ g въ g' , будемъ означать символомъ $q(\)q^{-1}$.

Преположимъ сначала, что бикватерніонъ g есть бивекторъ ρ . Разложивъ ρ на сумму его проекцій на щетку ϵ и на ось, $\rho = \rho'' + \rho'$, мы будемъ имѣть

$$q \rho q^{-1} = q(\rho' + \rho'')q^{-1} = q \rho' q^{-1} + q \rho'' q^{-1}.$$

Такъ какъ винтъ ϵ и бивекторъ ρ' имѣютъ общую ось, то $\rho' = T\rho' \epsilon$, а потому, замѣчая, что

$$q^{-1} = \frac{Kq}{Nq} = (Tq)^{-1}(\cos \theta - \epsilon s n \theta),$$

получимъ $q\varrho'q^{-1} = \varrho'$,

$$q\varrho''q^{-1} = \varrho''\cos^2\theta - \varepsilon\varrho''\varepsilon\sin^2\theta + (\varepsilon\varrho'' - \varrho''\varepsilon)\sin\theta\cos\theta.$$

Но оси ε и ϱ'' пересѣкаются подъ прямымъ угломъ, слѣдовательно $S\varepsilon\varrho'' = 0$, $\varepsilon\varrho'' = V\varepsilon\varrho'' = -V\varrho''\varepsilon = -\varrho''\varepsilon$, $\varepsilon\varrho''\varepsilon = -\varrho''$, и

$$q\varrho q^{-1} = \varrho' + (\cos 2\theta + \varepsilon\sin 2\theta)\varrho''.$$

Если мы свяжемъ неизмѣняемо оси бивекторовъ $\varrho, \varrho', \varrho''$ и ихъ совокупности сообщимъ какое нибудь перемѣщеніе, сохранивъ при этомъ ихъ тензоры, назовемъ бивекторы $\sigma, \sigma', \sigma''$, въ ихъ новыхъ положеніяхъ черезъ $\sigma, \sigma', \sigma''$, то относительное положеніе осей $\sigma, \sigma', \sigma''$ будетъ таково же, какъ и относительное положеніе $\varrho, \varrho', \varrho''$ и $T\sigma, T\sigma', T\sigma''$ будутъ соотвѣтственно равны $T\varrho, T\varrho', T\varrho''$, а потому изъ равенства $\varrho = \varrho' + \varrho''$ будетъ слѣдовать $\sigma = \sigma' + \sigma''$. Предположимъ теперь, что то перемѣщеніе, о которомъ у насъ идетъ рѣчь, есть винтовое перемѣщеніе, имѣющее осью ε и опредѣляемое комплекснымъ угломъ 2θ . Тогда, такъ какъ ось ϱ' совпадаетъ съ осью ε , бивекторъ ϱ' будетъ скользить вдоль своей оси и $\sigma' = \varrho'$; такъ какъ ось ϱ'' пересѣкаетъ ось ε подъ прямымъ угломъ, винтовое перемѣщеніе будетъ эквивалентно умноженію ϱ'' на векторъ $\cos 2\theta + \varepsilon\sin 2\theta$ [см. § 56], и слѣдовательно $\sigma'' = (\cos 2\theta + \varepsilon\sin 2\theta)\varrho''$. Такимъ образомъ, на основаніи равенства $\sigma = \sigma' + \sigma''$, бивекторъ ϱ при рассматриваемомъ перемѣщеніи обратится въ $\sigma = \sigma' + \sigma'' = \varrho' + (\cos 2\theta + \varepsilon\sin 2\theta)\varrho'' = q\varrho q^{-1}$. Итакъ, мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

Теорема I. Операция $q(\varrho)q^{-1}$ не мѣняетъ тензора бивектора ϱ и сообщаетъ его оси винтовое перемѣщеніе вокругъ оси бикватерніона q , опредѣляемое его удвоеннымъ угломъ, т. е. поворачиваетъ ось ϱ вокругъ оси q на уголъ равный двойному повороту q , 2φ , и сообщаетъ ей поступательное перемѣщеніе по направлению этой оси равное двойному шагу q , $2d$.

Пользуясь этой теоремой не трудно опредѣлить, во что преобразуетъ операциія $q(\quad)q^{-1}$ какой либо бикватерніонъ $r = w + \varrho$, где w есть комплексное число $w_0 + \omega w_1$. Примѣняя къ r операцију $q(\quad)q^{-1}$, мы получаемъ:

$$r' = q(w + \varrho)q^{-1} = qwq^{-1} + q\varrho q^{-1} = w + \sigma.$$

Тензоры и комплексные углы ϑ и ϑ' бикватернионовъ г и g' опредѣляются по формуламъ:

$$Tr'cs\vartheta = w, \quad Tr'cs\vartheta' = w, \quad [\text{см. (37) § 26}]$$

$$Tr'sn\vartheta = T\sigma, \quad Tr'sn\vartheta' = T\sigma.$$

Но на основаніи только что доказанной теоремы $T\sigma = T\sigma$, а потому изъ этихъ равенствъ мы заключаемъ, что $Tr' = Tr$ и $\vartheta' = \vartheta$. Кроме того, такъ какъ осью g' служить ось σ , то мы приходимъ къ такой теоремѣ:

Теорема II. Операция $q(\quad)q^{-1}$ къ какому бы бикватерниону г она ни была применена не множетъ ни тензора ни угла его и сообщаетъ только его оси винтовое перемѣщеніе вокругъ оси q , опредѣляемое двойнымъ угломъ бикватерниона q .

Tq , какъ видимъ, никакой роли въ операциі $q(\quad)q^{-1}$ не играетъ: она вполнѣ характеризуется положеніемъ оси q и его угломъ.

Мы видѣли [см. § 28], что степень бивектора α , имѣющая показателемъ $t = t_0 + \omega t_1$ есть бикватерніонъ

$$q = (T\alpha)^t \left(cs \frac{t\pi}{2} + Uasn \frac{t\pi}{2} \right) = \alpha^t.$$

Очевидно, что $Tq = (T\alpha)^t$ и $Uq = cs(t\pi/2) + esn(t\pi/2)$, что осью q служить ось α и наконецъ что уголъ $q = t\pi/2$. Вычисляя q^{-1} , мы получаемъ:

$$q^{-1} = \frac{1}{(T\alpha)^t} \left(cs \frac{t\pi}{2} - Uasn \frac{t\pi}{2} \right), \quad [\text{см. (17) § 22}]$$

но $(T\alpha)^{-1} = \frac{1}{(T\alpha)^t}$, а потому

$$q^{-1} = (\alpha^t)^{-1} = (T\alpha)^{-t} \left(cs \frac{t\pi}{2} - Uasn \frac{t\pi}{2} \right) = \alpha^{-t}. \quad (42)$$

Вторая теорема можетъ быть, слѣдовательно, формулирована такимъ образомъ:

Операция $\alpha^t(\quad)\alpha^{-t}$ къ какому бы бикватерниону г она ни была применена не множетъ ни тензора ни угла его,

но сообщаетъ только ею оси винтовое перемѣщеніе вокругъ оси a , опредѣляемое угломъ $t\pi$.

Теоремы этого параграфа представляютъ двѣ весьма важныя теоремы теоріи бикватерніоновъ. Онѣ получаются у насъ какъ примѣръ приложенія метода перенесенія. Первую изъ нихъ мы встрѣчаемъ у г. Study въ его мемуарѣ „Von den Bewegungen und Umlegungen“ (M. A. B. XXXIX), гдѣ онѣ даетъ ея доказательство, исходя изъ соображеній, основанныхъ на теоріи группъ (въ смыслѣ S. Lie), и формулируетъ ее на языкѣ этой теоріи. Она служитъ основной теоремой всей второй половины упомянутаго мемуара.

71. Обобщеніе формулъ Rodrigues-Euler'a, формулы Study. Возвращаемся теперь къ задачѣ, поставленной въ концѣ § 68.

Систему координатныхъ винтовъ i,j,k мы можемъ совмѣстить съ системой i',j',k' нѣкоторымъ винтовымъ перемѣщеніемъ. Пусть ϵ есть винтъ параметра нуль, имѣющій свою осью перемѣщенія и $2\theta = 2\varphi + \omega 2d$ комплексный уголъ, перемѣщеніе опредѣлающій. Винтомъ ϵ и угломъ 2θ мы можемъ задать положеніе системы i',j',k' относительно осей i,j,k .

Если $q = t(\cos\theta + \sin\theta) = w + ix + jy + kz$, гдѣ $w = w_0 + \omega w_1$, $x = x_0 + \omega x_1$, $y = y_0 + \omega y_1$, $z = z_0 + \omega z_1$, и $t = Tq$, то операция $q(\quad)q^{-1}$ будетъ операцией, которая систему осей i,j,k совмѣстить съ системой i',j',k' , и слѣдовательно

$$i' = qiq^{-1}, \quad j' = qjq^{-1}, \quad k' = qkq^{-1}$$

Такъ какъ $Nq = (Tq)^3 = t^3$, то

$$q^{-1} = \frac{Kq}{Nq} = (w - ix - jy - kz) : t^3,$$

$$i' = qiq^{-1} = [i(w^3 + x^3 - y^3 - z^3) + j2(wz + xy) + k2(-wy + zx)] : t^3$$

Коэффициенты при i,j,k суть косинусы l_1, m_1, n_1 комплексныхъ угловъ, которые ось i' образуетъ съ осами i,j,k . Подобнымъ же образомъ, вычисляя qjq^{-1} и qkq^{-1} мы найдемъ выраженія и для $l_2, m_2, n_2; l_3, m_3, n_3$ и составимъ слѣдующую таблицу формулъ:

$$\begin{aligned} l_1 &= (w^3 + x^3 - y^3 - z^3) : t^3, \\ m_2 &= (w^3 - x^3 + y^3 - z^3) : t^3, \\ n_3 &= (w^3 - x^3 - y^3 + z^3) : t^3, \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} n_2 &= 2(yz + wx):t^3, & m_3 &= 2(yz - wx):t^3, \\ l_3 &= 2(zx + wy):t^3, & n_1 &= 2(zx - wy):t^3, \\ m_1 &= 2(xy + wz):t^3, & l_2 &= 2(xy - wz):t^3, \\ t^3 &= w^3 + x^3 + y^3 + z^3. \end{aligned} \quad (43)$$

Это формулы Rodrigues-Euler'a, представленные въ однородномъ видѣ. Развертывал ихъ. мы получаемъ:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (w_0^3 + x_0^3 - y_0^3 - z_0^3):t_0^3, \\ u_2 &= (w_0^3 - x_0^3 + y_0^3 - z_0^3):t_0^3, \\ v_3 &= (w_0^3 - x_0^3 - y_0^3 + z_0^3):t_0^3, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} v_2 &= 2(y_0z_0 + w_0x_0):t_0^3, & \mu_3 &= 2(y_0z_0 - w_0x_0):t_0^3, \\ \lambda_3 &= 2(z_0x_0 + w_0y_0):t_0^3, & v_1 &= 2(z_0x_0 - w_0y_0):t_0^3, \\ u_1 &= 2(x_0y_0 + w_0z_0):t_0^3, & \lambda_1 &= 2(x_0y_0 - w_0z_0):t_0^3, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 2(w_0w_1 + x_0x_1 - y_0y_1 - z_0z_1):t_0^3 - 2\lambda_1 Pt, \\ \eta_2 &= 2(w_0w_1 - x_0x_1 + y_0y_1 - z_0z_1):t_0^3 - 2\mu_3 Pt, \\ \zeta_3 &= 2(w_0w_1 - x_0x_1 - y_0y_1 + z_0z_1):t_0^3 - 2v_3 Pt, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \zeta_2 &= 2(y_0z_1 + y_1z_0 + w_0x_1 + w_1x_0):t_0^3 - 2v_2 Pt, \\ \xi_3 &= 2(z_0x_1 + z_1x_0 + w_0y_1 + w_1y_0):t_0^3 - 2\lambda_3 Pt, \\ \tau_1 &= 2(x_0y_1 + x_1y_0 + w_0z_1 + w_1z_0):t_0^3 - 2\mu_1 Pt, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \eta_3 &= 2(y_0z_1 + y_1z_0 - w_0x_1 - w_1x_0):t_0^3 - 2\mu_3 Pt, \\ \zeta_1 &= 2(z_0x_1 + z_1x_0 - w_0y_1 - w_1y_0):t_0^3 - 2v_1 Pt, \\ \xi_2 &= 2(x_0y_1 + x_1y_0 - w_0z_1 - w_1z_0):t_0^3 - 2\lambda_2 Pt, \end{aligned} \quad (45)$$

$$t_0^3 = w_0^3 + x_0^3 + y_0^3 + z_0^3, \quad t_0t_1 = w_0w_1 + x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1.$$

Если бы въ этихъ формулахъ мы измѣнили обозначенія, то получили бы формулы г. Study [л. с., (4) и (6), стр. 537]. Такимъ образомъ формулы г. Study можно рассматривать, какъ развернутыя формулы Rodrigues-Euler'a преобразованія точечныхъ координатъ, когда каждъ координаты точки,

такъ и параметры, опредѣляющіе положеніе новой системы координатъ становятся комплексными числами вида $a_0 + \omega a_1$.

Что касается геометрическаго значенія параметровъ $w_0, x_0, y_0, z_0, w_1, x_1, y_1, z_1$, то оно видно изъ формулы (14) § 64.

Такъ какъ $\Gamma q = t$ не вліяетъ на операцию $q(\quad)q^{-1}$, то мы можемъ упростить предыдущія формулы, не уменьшая ихъ общности, положивъ $t_0 = 1$ и $t_0 t_1 = w_0 w_1 + x_0 x_1 + y_0 y_1 + z_0 z_1 = 0$.

Чтобы по даннымъ $\lambda_s, \mu_s, v_s, \xi_s, \eta_s, \zeta_s$, ($s = 1, 2, 3$) найти $w_0, w_1, x_0, x_1, y_0, y_1, z_0, z_1$, мы должны решить ур. (45) и (44) относительно послѣднихъ. Съ этою цѣлью решимъ сначала ур. (43) относительно w, x, y, z и, выразивъ w, x, y, z черезъ t_s, m_s, n_s ($s = 1, 2, 3$), полученные выраженія развернемъ. Тогда будемъ имѣть формулы:

$$\begin{aligned} 1 + \lambda_1 + \mu_2 + v_3 &= 4(w_0 : t_0)^2, \\ 1 + \lambda_1 - \mu_2 - v_3 &= 4(x_0 : t_0)^2, \\ 1 - \lambda_1 + \mu_2 - v_3 &= 4(y_0 : t_0)^2, \\ 1 - \lambda_1 - \mu_2 + v_3 &= 4(z_0 : t_0)^2, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} v_2 - \mu_3 &= 4(w_0 : t_0)(x_0 : t_0), & v_2 + \mu_3 &= 4(y_0 : t_0)(z_0 : t_0), \\ \lambda_3 - v_1 &= 4(w_0 : t_0)(y_0 : t_0), & \lambda_3 + v_1 &= 4(z_0 : t_0)(x_0 : t_0), \\ \mu_1 - \lambda_3 &= 4(w_0 : t_0)(z_0 : t_0), & \mu_1 + \lambda_3 &= 4(x_0 : t_0)(y_0 : t_0), \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \xi_1 + \eta_2 + \zeta_3 &= 2(Pw - Pt)(1 + \lambda_1 + \mu_2 + v_3), \\ \xi_1 - \eta_2 - \zeta_3 &= 2(Px - Pt)(1 + \lambda_1 - \mu_2 - v_3), \\ -\xi_1 + \eta_2 - \zeta_3 &= 2(Py - Pt)(1 - \lambda_1 + \mu_2 - v_3), \\ -\xi_1 - \eta_2 + \zeta_3 &= 2(Pz - Pt)(1 - \lambda_1 - \mu_2 + v_3), \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \zeta_2 - \eta_3 &= (Pw + Px - 2Pt)(v_2 - \mu_3), \\ \xi_3 - \zeta_1 &= (Pw + Py - 2Pt)(\lambda_3 - v_1), \\ \eta_1 - \lambda_3 &= (Pw + Pz - 2Pt)(\mu_1 - \lambda_3), \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \zeta_3 + \eta_3 &= (Py + Pz - 2Pt)(v_2 + \mu_3), \\ \xi_2 + \zeta_1 &= (Pz + Px - 2Pt)(\lambda_3 + v_1), \\ \eta_1 + \xi_3 &= (Px + Py - 2Pt)(\mu_1 + \lambda_3), \end{aligned} \quad (47)$$

изъ которыхъ, какъ видимъ, опредѣляются только отношения $w:t_0, x:t_0, y:t_0, z:t_0$, и разности $Pw-Pt, Px-Pt, Py-Pt, Pz-Pt$, величины же t_0 и Pt остаются неопределенными, и мы ихъ можемъ выбрать совершенно произвольно, что и понятно, такъ какъ операциі $q(\)q^{-1}$, а следовательно и положеніе новыхъ осей не зависятъ отъ $Tq=t=t_0(1+\omega Pt)$, и по данному положенію осей найти t_0 и Pt нельзя.

72. Соотношенія между параметрами обобщенныхъ формулъ Euler'a и Rodrigues-Euler'a. Совмѣстить систему осей i,j,k съ системой i',j',k' мы можемъ, сообщивъ первой три послѣдовательныхъ винтовыхъ перемѣщенія: 1) винтовое перемѣщеніе вокругъ оси k , опредѣляемое комплекснымъ угломъ ψ , тогда оси i и j совмѣстятся съ i'' и j'' [см. чертежъ § 69], 2) винтовое перемѣщеніе вокругъ оси j'' , опредѣляемое угломъ ϑ , тогда оси i,j,k совпадутъ съ i'',j'',k' и въ 3) винтовое перемѣщеніе вокругъ оси k' , опредѣляемое угломъ φ , тогда окончательно оси i,j,k совпадутъ съ осами i',j',k' .

Операциі эквивалентная первому перемѣщенію будетъ $k \frac{\psi}{\pi} (\) k - \frac{\psi}{\pi}$ [см. § 70], второму $j'' \frac{\vartheta}{\pi} (\) j'' - \frac{\vartheta}{\pi}$ и третьему $k' \frac{\varphi}{\pi} (\) k' - \frac{\varphi}{\pi}$, а операциі эквивалентная всѣмъ тремъ перемѣщеніямъ будетъ $k' \frac{\varphi}{\pi} j'' \frac{\vartheta}{\pi} k \frac{\psi}{\pi} (\) k - \frac{\psi}{\pi} j'' - \frac{\vartheta}{\pi} k' - \frac{\varphi}{\pi}$. Если мы означимъ черезъ r бикватерніонъ

$$r = k' \frac{\varphi}{\pi} j'' \frac{\vartheta}{\pi} k \frac{\psi}{\pi},$$

то, пользуясь формулой 42 § 70 и известнымъ равенствомъ теоріи кватерніоновъ:

$$(qrs)^{-1} = s^{-1} r^{-1} q^{-1}, \quad (47_0)$$

гдѣ q,r,s какіе либо бикватерніоны, равенствомъ, которое выводится изъ формулъ [(17) § 22, (41) и (42) § 27], легко будетъ видѣть, что

$$r^{-1} = k - \frac{\psi}{\pi} j'' - \frac{\vartheta}{\pi} k' - \frac{\varphi}{\pi}.$$

Такимъ образомъ, совокупность трехъ винтовыхъ перемѣщений будетъ эквивалентна операциі $r(\)q^{-1}$, или, если положимъ $q = tr$, где t какое нибудь комплексное число, операциі $q(\)q^{-1}$. Бикватерніонъ q будетъ, следовательно, тѣмъ бикватерніономъ, который мы употребляли въ предыдущемъ параграфѣ, и операциі $q(\)q^{-1}$ опредѣлить то винтовое перемѣщеніе, которое переводитъ систему i,j,k въ i',j',k' .

Вычисляя помощью формулъ (32) § 69 бикватерніонъ q , мы получаемъ:

$$\begin{aligned} r = q:t = & cs^{\frac{1}{2}}(\varphi + \psi)cs^{\frac{1}{2}}\vartheta + isn^{\frac{1}{2}}(\varphi - \psi)sn^{\frac{1}{2}}\vartheta \\ & + jcs^{\frac{1}{2}}(\varphi - \psi)sn^{\frac{1}{2}}\vartheta + ksn^{\frac{1}{2}}(\varphi + \psi)cs^{\frac{1}{2}}\vartheta \end{aligned} \quad (48)$$

[См. Tait. Traité élémentaire des Quaternions, traduit par Plarr, Paris, 1882 et 84, Second partie, p. 100], и следовательно:

$$\begin{aligned} x:t = & sn^{\frac{1}{2}}(\varphi - \psi)sn^{\frac{1}{2}}\vartheta, \quad z:t = sn^{\frac{1}{2}}(\varphi + \psi)cs^{\frac{1}{2}}\vartheta, \\ y:t = & cs^{\frac{1}{2}}(\varphi - \psi)sn^{\frac{1}{2}}\vartheta, \quad w:t = cs^{\frac{1}{2}}(\varphi + \psi)cs^{\frac{1}{2}}\vartheta. \end{aligned} \quad (49)$$

Эти формулы и даютъ соотношенія между параметрами обобщенныхъ формулъ Euler'a и формулъ Rodrigues-Euler'a. Разворачивая ихъ, мы получаемъ:

$$\begin{aligned} x_0:t_0 = & sn^{\frac{1}{2}}(\varphi_0 - \psi_0)sn^{\frac{1}{2}}\vartheta_0, \quad z_0:t_0 = sn^{\frac{1}{2}}(\varphi_0 + \psi_0)cs^{\frac{1}{2}}\vartheta_0, \\ y_0:t_0 = & cs^{\frac{1}{2}}(\varphi_0 - \psi_0)sn^{\frac{1}{2}}\vartheta_0, \quad w_0:t_0 = cs^{\frac{1}{2}}(\varphi_0 + \psi_0)cs^{\frac{1}{2}}\vartheta_0, \end{aligned}$$

$$Px - Pt = \frac{1}{2}(\varphi_1 - \psi_1)ctg^{\frac{1}{2}}(\varphi_0 - \psi_0) + \frac{1}{2}\vartheta_1 ctg^{\frac{1}{2}}\vartheta_0, \quad (50)$$

$$Py - Pt = -\frac{1}{2}(\varphi_1 - \psi_1)tg^{\frac{1}{2}}(\varphi_0 - \psi_0) + \frac{1}{2}\vartheta_1 ctg^{\frac{1}{2}}\vartheta_0,$$

$$Pz - Pt = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \psi_1)ctg^{\frac{1}{2}}(\varphi_0 + \psi_0) - \frac{1}{2}\vartheta_1 tg^{\frac{1}{2}}\vartheta_0,$$

$$Pw - Pt = -\frac{1}{2}(\varphi_1 + \psi_1)tg^{\frac{1}{2}}(\varphi_0 + \psi_0) - \frac{1}{2}\vartheta_1 tg^{\frac{1}{2}}\vartheta_0,$$

формулы для определенія $w_0, x_0, y_0, z_0, w_1, x_1, y_1, z_1$, по даннымъ $\psi_0, \vartheta_0, \varphi_0, \psi_1, \vartheta_1, \varphi_1$. Чтобы обратно, по даннымъ $w_0, x_0, \dots, y_1, z_1$, найти комплексные Euler'овы углы, мы решаемъ ур. (49) относительно $\vartheta, \varphi + \psi, \varphi - \psi$ и, полученные для нихъ выражения, развертываемъ. Мы получаемъ тогда формулы, которые для определенія $\vartheta_0, \psi_0, \varphi_0, \psi_1, \vartheta_1, \varphi_1$ можемъ комбинировать.

между собой различнымъ образомъ. Мы выпишемъ слѣдующія формулы:

$$\begin{aligned} \operatorname{cs}\vartheta_0 &= (w_0^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) : t_0^2, \\ \vartheta_1 \operatorname{sn}\vartheta_0 &= -2(w_0 w_1 + x_0 x_1 + y_0 y_1 + z_0 z_1) : t_0^2 + 2 \operatorname{cs}\vartheta_0 P t, \quad (51) \\ \operatorname{tg}^2(\varphi_0 - \psi_0) &= x_0 : y_0, \quad \operatorname{tg}^2(\varphi_0 + \psi_0) = z_0 : w_0, \\ \varphi_1 - \psi_1 &= 2 \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_0^2 + y_0^2}, \quad \varphi_1 + \psi_1 = 2 \frac{z_1 w_0 - z_0 w_1}{z_0^2 + w_0^2}. \end{aligned}$$

Вопросъ объ томъ въ какихъ четвертяхъ мы должны выбрать углы $\varphi_0, \vartheta_0, \psi_0$, рѣшимъ въ каждомъ частомъ случаѣ, если обратимъ вниманіе на знаки первыхъ частей формулъ (50).

Если $\vartheta_0 = 0$, то формулы (50) принимаютъ видъ:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 : t_0 = \operatorname{sn}^2(\varphi_0 + \psi_0), \quad w_0 : t_0 = \operatorname{cs}^2(\varphi_0 + \psi_0),$$

$$\begin{aligned} x_1 : t_0 &= \operatorname{sn}^2(\varphi_0 - \psi_0), \\ y_1 : t_0 &= \operatorname{sn}^2(\varphi_0 - \psi_0), \end{aligned} \quad (52)$$

$$Pz - Pt = -\operatorname{ctg}^2(\varphi_0 + \psi_0) \operatorname{tg}^2(\varphi_0 - \psi_0),$$

$$Pw - Pt = -\operatorname{ctg}^2(\varphi_0 + \psi_0) \operatorname{lg}^2(\varphi_0 + \psi_0),$$

$$\text{откуда} \quad \operatorname{tg}^2(\varphi_0 - \psi_0) = x_1 : y_1 \quad \text{и} \quad \vartheta_1^2 = 4(x_1 + y_1) : t_0^2.$$

и для $\operatorname{tg}(\varphi_0 + \psi_0)$ и $\varphi_1 + \psi_1$ имѣемъ прежнія значенія; разность же $\varphi_1 - \psi_1$ остается неопределённой.

73. *Новое начало координатъ.* Въ параграфахъ 68, 69 и 71 мы опредѣляли положеніе новой системы координатъ косинусами комплексныхъ угловъ между старыми и новыми осями въ первомъ изъ нихъ, комплексными Euler'овыми углами во второмъ, и въкоторымъ бикватерніономъ въ третьемъ. Интересно изслѣдовать, какъ въ тѣхъ, или другихъ изъ этихъ данныхыхъ выражаются координаты нового начала.

Въ первомъ случаѣ мы опредѣлимъ ихъ по известнымъ формуламъ, рассматривая новое начало O' , какъ точку пере-

съченія или осей i' и j' , или осей j' и k' , или осей k' и i' . Такимъ образомъ, означая l, m, n координаты O' будемъ имѣть:

$$l : m : n : 1 = \quad (54)$$

$$\eta_s \zeta_u - \eta_u \zeta_s, \zeta_s \xi_u - \xi_u \xi_s, \xi_s \eta_u - \xi_u \eta_s, \lambda_u \xi_s + \mu_u \eta_s + v_u \zeta_s, (s, u = 1, 2, 3)$$

Чтобы опредѣлить координаты O' въ третьемъ случаѣ, когда положеніе новой системы координатъ задано бикватерніономъ, мы постараемся раскрыть, въ какомъ отношеніи къ операциі $q(\)q^{-1}$, гдѣ $q = q_0 + \omega q_1$, находится векторъ $V(q_1/q_0)$.

Замѣтимъ, что бивекторы, оси которыхъ образуютъ связку съ центромъ O , преобразуются операцией $q(\)q^{-1}$ въ бивекторы также нѣкоторой связки съ центромъ O'_1 , причемъ очевидно, что точка O'_1 есть та точка, въ которую переходитъ O_1 при винтовомъ перемѣщении, опредѣляемомъ операцией $q(\)q^{-1}$. Такимъ образомъ мы можемъ говорить о преобразованіи точекъ пространства операцией $q(\)q^{-1}$.

Чтобы опредѣлить ту точку O' , въ которую переходитъ точка O приведенія бикватерніона q , мы разматриваемъ ее какъ центръ связки бивекторовъ $\rho = Q_0$ параметра нуль. Точка O' будетъ тогда центромъ связки бивекторовъ:

$$\sigma = q(Q_0)q^{-1}.$$

Такъ какъ операциі $q(\)q^{-1}$ не зависитъ отъ $Tq = t$, то для упрощенія мы можемъ замѣнить бикватерніонъ q его верзоромъ, который мы означимъ черезъ $r = r_0 + \omega r_1 = Uq$. Тогда

$$\sigma = r(Q_0)r^{-1},$$

или, такъ какъ $(Tr)^2 = Nr = Nr_0 = 1$, и слѣдовательно $r^{-1} = Kr_0 + \omega Kr_1$,

$$\sigma = (r_0 + \omega r_1)Q_0(Kr_0 + \omega Kr_1) = r_0 Q_0 Kr_0 + \omega(r_0 Q_0 Kr_1 + r_1 Q_0 Kr_0),$$

или, наконецъ, если воспользуемся формулами: $s - Ks = 2Vs$, гдѣ s какой либо бикватерніонъ, и (41) § 27,

$$\sigma = r_0 Q_0 Kr_0 + 2\omega V(r_1 Q_0 Kr_0).$$

Означимъ черезъ 2χ векторъ OO' и примемъ точку O' за точку приведенія бивектора σ ; тогда онъ приметъ видъ [см. (2) § 30]:

$$r_o Q_o Kr_o + 2\omega [V(r_i Q_o Kr_o) - V(\chi \cdot r_o Q_o Kr_o)],$$

Но параметръ бивектора σ равенъ нулю и точка O' находится на его оси, слѣдовательно моментъ σ для точки O' долженъ обратиться въ нуль и

$$V(\chi \cdot r_o Q_o Kr_o) = V(r_i Q_o Kr_o),$$

каковъ бы ни былъ векторъ Q_o . Обратно, если нѣкоторый векторъ χ будетъ удовлетворять этому уравненію при произвольномъ Q_o , то 2χ будетъ векторомъ OO' . Не трудно показать, что уравненію удовлетворяетъ при всякомъ Q_o векторъ $V(r_i : r_o)$. Въ самомъ дѣлѣ, вслѣдствіе преположенія, что r есть верзоръ и стало быть $Pt = S(r_i : r_o) = 0$, $V(r_i : r_o) = r_i : r_o = r_i Kr_o$, внося $V(r_i : r_o)$ вместо χ въ первую часть предыдущаго уравненія, мы получаемъ:

$$V(r_i Kr_o \cdot r_o Q_o Kr_o) = V(r_i (Kr_o r_o) Q_o Kr_o) = V(r_i Q_o Kr_o),$$

ибо $Kr_o \cdot r_o = Nr_o = 1$.

Итакъ $\chi = V(r_i : r_o) = r_i : r_o$; во $q = tr = t_o r_o + \omega(t_o r_i + t_i r_o)$, а потому

$$Pq + \chi = q_1/q_0, \quad (55)$$

откуда $\chi = V(q_1 : q_0)$. Мы находимъ такимъ образомъ значеніе вектора $V(q_1 : q_0)$ и формула (55), представляющая обобщеніе формулы (5) § 31, даетъ намъ слѣдующую теорему:

Частное отъ дѣленія момента бикватерніона q на его главную часть, q_1/q_0 , есть кватерніонъ, скалярная часть которого равняется параметру бикватерніона, Pq , а векторная—половина вектора, соединяющаго точку O приведенія q съ точкой O' , въ которую она переходитъ при винтовомъ перемѣщеніи, опредѣляемомъ операцией $q(\quad)q^{-1}$.

Изъ этой теоремы слѣдуетъ, что точка, находящаяся въ концѣ вектора q , операцией $q(\quad)q^{-1}$ переводится въ точку въ концѣ вектора

$$2\chi + q_0 \gamma q_0^{-1}$$

Если q будетъ бикватерніономъ, опредѣляющимъ положеніе новой системы координатъ $O'(i',j',k')$ относительно старой $O(i,j,k)$, то операциі $q(\quad)q^{-1}$ будетъ переводить старую систему координатъ въ новое положеніе и точку O въ O' . Поэтому векторъ $OO' = 2\chi = 2V(q_1:q_0) = 2V(q_1 K q_0):t_0^2$. Вычисливъ его, мы находимъ для координатъ точки O' выраженія

$$\begin{aligned} l &= 2(w_0 x_1 - w_1 x_0 + y_0 z_1 - y_1 z_0):t_0^2, \\ m &= 2(w_0 y_1 - w_1 y_0 + z_0 x_1 - z_1 x_0):t_0^2, \\ n &= 2(w_0 z_1 - w_1 z_0 + x_0 y_1 - x_1 y_0):t_0^2. \end{aligned} \quad (56)$$

Это формулы г. Study [л. с. форм. (5) стр. 528]. Внося въ нихъ вместо w_0, x_0, \dots ихъ выраженія въ функціи частей комплексныхъ Euler'овыхъ угловъ, получаемъ:

$$\begin{aligned} l &= \varphi_1 \operatorname{sn} \vartheta_0 \operatorname{cs} \psi_0 - \vartheta_1 \operatorname{sn} \psi_0, \\ m &= \varphi_1 \operatorname{sn} \vartheta_0 \operatorname{sn} \psi_0 + \vartheta_1 \operatorname{cs} \psi_0, \\ n &= \varphi_1 \operatorname{cs} \vartheta_0 + \psi_1. \end{aligned} \quad (57)$$

Эти формулы легко выводятся также геометрически изъ чертежа § 69.

74. Сложение конечныхъ винтовыхъ перемѣщений. Средній бивекторъ. Двѣ послѣдовательныя операциі $q(\quad)q^{-1}$ и $q'(\quad)q'^{-1}$, где q и q' какіе нибудь бикватерніоны будутъ эквивалентны операциі $q'q(\quad)q^{-1}q'^{-1}$.

Если означимъ произведеніе $q'q$ черезъ Q , то, по формулѣ (47_a) § 72, $Q^{-1} = q^{-1}q'^{-1}$ и

$$q'q(\quad)q^{-1}q'^{-1} = Q(\quad)Q^{-1}.$$

Такимъ образомъ двѣ операциі $q(\quad)q^{-1}$ и $q'(\quad)q'^{-1}$ будутъ эквивалентны одной операциі такого же типа, $Q(\quad)Q^{-1}$, и мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

Два послѣдовательныхъ конечныхъ винтовыхъ перемѣщений, первое вокругъ оси бикватерніона q на удвоенныйъ его уголъ, $2\angle q$, второе вокругъ оси бикватерніона q' , на его удвоенныйъ уголъ, $2\angle q'$, эквивалентно одному винтовому перемѣщению вокругъ оси бикватерніона $Q = q'q$ на удвоенныйъ уголъ Q , $2\angle Q$.

Эта теорема сводит задачу сложения и разложения конечныхъ винтовыхъ перемѣщеній на умноженіе и дѣленіе бикватерніоновъ и даетъ возможность решить ее или геометрическими построеніями, или путемъ вычислений.

Пусть намъ даны два конечныхъ винтовыхъ перемѣщенія, одно вокругъ оси ϵ на комплексный уголъ $\Theta = \vartheta_0 + \omega\vartheta_1$, другое вокругъ оси ϵ' на уголъ $\Theta' = \vartheta'_0 + \omega\vartheta'_1$. Если положимъ $q = cs^{1/2}\vartheta + \epsilon sn^{1/2}\vartheta$ и $q' = cs^{1/2}\vartheta' + \epsilon' sn^{1/2}\vartheta'$, то сложное винтовое перемѣщеніе будетъ иметь своюю осью и комплекснымъ угломъ ось и двойной уголъ бикватерніона $Q = cs^{1/2}\Theta + Esn^{1/2}\Theta = q'q$.

Поэтому, припомнивъ построение произведенія двухъ верхоровъ-бикватерніоновъ [см § 58], мы приходимъ къ слѣдующему правилу сложенія двухъ конечныхъ винтовыхъ перемѣщеній.

Построимъ сначала ось β , которая идетъ по линіи кратчайшаго разстоянія между осами ϵ и ϵ' , а потомъ двѣ линіи α и γ такъ, чтобы первая пересѣкала подъ прямымъ угломъ ось ϵ и съ осью β относительно направлениія ϵ образовала бы комплексный уголъ $1/2\vartheta$, а вторая встрѣчала бы ось ϵ' и комплексный уголъ между осью β и ею относительно направлениія ϵ' былъ $1/2\vartheta'$. Тогда линія кратчайшаго разстоянія между осами α и γ будетъ осью сложнаго перемѣщенія, а удвоенный комплексный уголъ между α и γ будетъ равенъ комплексному углу перемѣщенія, Θ .

Чтобы найти зависимость между положеніями осей ϵ, ϵ' и E и углами ϑ, ϑ' и Θ , означимъ уголъ между осами ϵ и ϵ' чрезъ $v = v_0 + \omega v_1$. Перемножая q' и q и замѣчая, что $\epsilon'\epsilon = -csv + V\epsilon'\epsilon$ получимъ

$$cs^{1/2}\Theta = cs^{1/2}\vartheta cs^{1/2}\vartheta' - sn^{1/2}\vartheta sn^{1/2}\vartheta' csv, \quad (58)$$

$$\begin{aligned} Esn^{1/2}\Theta = & \epsilon sn^{1/2}\vartheta cs^{1/2}\vartheta' + \epsilon' sn^{1/2}\vartheta' cs^{1/2}\vartheta \\ & + V\epsilon'\epsilon sn^{1/2}\vartheta sn^{1/2}\vartheta'. \end{aligned} \quad (59)$$

Эти формулы вполнѣ опредѣляютъ сложное перемѣщеніе. Первая даетъ возможность опредѣлить комплексный уголъ Θ ; развернувъ ее мы имѣемъ:

$$cs^{1/2}\Theta_0 = cs^{1/2}\vartheta_0 cs^{1/2}\vartheta_0' - sn^{1/2}\vartheta_0 sn^{1/2}\vartheta_0' csv_0, \quad (60)$$

$$\begin{aligned}\Theta_1 sn^{1/2} \Theta_0 &= \vartheta_1 (sn^{1/2} \vartheta_0 cs^{1/2} \vartheta_0' + cs^{1/2} \vartheta_0 sn^{1/2} \vartheta_0' csv_0) \\ &\quad + \vartheta_1' (cs^{1/2} \vartheta_0 sn^{1/2} \vartheta_0' + sn^{1/2} \vartheta_0 cs^{1/2} \vartheta_0' csv_0) \\ &\quad - 2v_1 sn^{1/2} \vartheta_0 sn^{1/2} \vartheta_0' snv_0.\end{aligned}\quad (61)$$

Вторая, представляя $Esn^{1/2} \Theta$ въ видѣ суммы трехъ бивекторовъ, показываетъ, какимъ образомъ бивекторъ $Esn^{1/2} \Theta$ можетъ быть построенъ. Изъ неї мы можемъ получить различные формулы для определенія положенія оси E и угла Θ . Такъ, предполагая, что оси ϵ и ϵ' заданы комплексными углами, $g = g_0 + \omega g_1$, $h = h_0 + \omega h_1$, $l = l_0 + \omega l_1$ и g', h', l' , которые они образуютъ съ осями координатъ, мы можемъ вычислить координаты $Esn^{1/2} \Theta$. Проектируя его на ось i , по теоремѣ § 63 находимъ

$$\begin{aligned}sn^{1/2} \Theta cs G &= sn^{1/2} \vartheta cs^{1/2} \vartheta' csg + sn^{1/2} \vartheta' cs^{1/2} \vartheta csg' \\ &\quad + sn^{1/2} \vartheta sn^{1/2} \vartheta' (csh' csl - csh csl'),\end{aligned}\quad (62)$$

гдѣ G комплексный уголъ между осями E и i . Подобны же формулы получимъ и для проекцій $Esn^{1/2} \Theta$ на оси j и k .

Формулы (58) и (62) для вещественныхъ ϑ, ϑ', v , и т. д. принадлежать Rodrigues'у. [Des lois géométriques qui régissent les déplacements.... Journ. de Math., V, 1840, p. 408]. Мы видимъ теперь, что онѣ имѣютъ вполнѣ определенный смыслъ и въ томъ случаѣ, когда числа, въ нихъ входящія, становятся комплексными. Изъ (61) при $\vartheta_1 = \vartheta_1' = 0$ получается известная теорема Rodrigues'a [I. с. р. 396].

Проектируя бивекторъ $Esn^{1/2} \Theta$ на оси ϵ , ϵ' и $V\epsilon'\epsilon$, получаемъ формулы болѣе простыя:

$$\begin{aligned}sn^{1/2} \Theta cs f_1 &= sn^{1/2} \vartheta cs^{1/2} \vartheta' + cs^{1/2} \vartheta sn^{1/2} \vartheta' csv, \\ sn^{1/2} \Theta cs f_2 &= sn^{1/2} \vartheta' cs^{1/2} \vartheta + sn^{1/2} \vartheta cs^{1/2} \vartheta' csv, \\ sn^{1/2} \Theta cs f_3 &= sn^{1/2} \vartheta sn^{1/2} \vartheta' snv,\end{aligned}\quad (63)$$

гдѣ $f_1 = f_{10} + \omega f_{11}$, $f_2 = f_{20} + \omega f_{21}$, $f_3 = f_{30} + \omega f_{31}$ суть комплексные углы, которыхъ ось E образуетъ съ осями ϵ, ϵ' и $V\epsilon'\epsilon$.

По этимъ проекціямъ мы можемъ определить бивекторъ $Esn^{1/2} \Theta$, ибо, какъ покажемъ въ § 80, всякий бивекторъ можетъ быть построенъ по тремъ проекціямъ на три, не принадлежащія одной плоскости, линіи.

Развернувъ формулы (63), мы можемъ помошью ихъ представить равенство (61), по раздѣлениі его на $sn^{1/2}\Theta_0$, въ видѣ:

$$\Theta_1 = \vartheta_1 c s f_{10} + \vartheta_1' c s f_{20} - 2v_1 f_{30}, \quad (64)$$

Эта формула, которая, замѣтимъ кстати, весьма просто выводится геометрически, позволяетъ вычислить Θ_1 , если f_{10}, f_{20}, f_{30} будутъ извѣстны.

Послѣдней изъ формулъ (63) можно дать весьма простое толкованіе, если мы введемъ понятіе о среднемъ бивекторѣ конечнаго винтоваго перемѣщенія. Такъ мы назовемъ бивекторъ, которому осью служить ось ϵ перемѣщенія и тензоромъ $sn^{1/2}\vartheta$, где ϑ комплексный уголъ, перемѣщеніе опредѣляющій. Кинематическое значеніе средняго бивектора видѣть не трудно. Пусть точки A_1, A_2, \dots при разсматриваемомъ перемѣщеніи переходятъ въ точки A'_1, A'_2, \dots . Раздѣливъ хорды $A_1 A'_1, A_2 A'_2, \dots$ въ точкахъ M_1, M_2, \dots пополамъ, будемъ имѣть векторы $M_1 A'_1, M_2 A'_2, \dots$, которые будутъ скоростями вѣктораго движенія неизмѣнной системы точекъ M_1, M_2, \dots . Осью и параметромъ этого движенія будутъ ϵ и $Rsn^{1/2}\vartheta = \vartheta_1 ctg^{1/2}\vartheta_0$, т. е. ось и параметръ средняго бивектора.

Мы можемъ теперь истолковать формулу, о которой говорили, слѣдующимъ образомъ:

Векторное произведение среднихъ бивекторовъ слагаемыхъ перемѣщеній равняется проекціи средняго бивектора сложнаго перемѣщенія на линію кратчайшаго разстоянія между осями слагаемыхъ перемѣщеній.

75. *Нѣкоторые слѣдствія изъ основной теоремы предыдущаго параграфа.* Чтобы имѣть возможность удобнѣе формулировать слѣдующія теоремы мы введемъ знакъ $[\alpha\beta]$. Такъ мы будемъ означать винтовое перемѣщеніе, которое имѣетъ осью линію кратчайшаго разстоянія между осями α и β и опредѣляется комплекснымъ угломъ между этими осями относительно положительного направлениія линіи кратчайшаго разстоянія, перемѣщеніе, которое, очевидно, совмѣщаетъ α съ β . Понятно, что $2[\alpha\beta]$ будетъ перемѣщеніемъ на удвоенный комплексный уголъ $(\alpha\beta)$ вокругъ той же оси, что перемѣщеніе $[\alpha\beta]$ прямо противоположно $[\beta\alpha]$ и $[\alpha\beta] + [\beta\alpha] = 0$.

Легко видеть, что теорема предыдущего параграфа допускает такое обобщение: конечная винтовая перемещение вокруг осей бикватернионов q, q', q'', \dots на их удвоенные углы слагаются въ одно перемещение, которому осью и угломъ служатъ ось и удвоенный уголъ бикватерниона $Q = \dots q''q'q$.

Если бы случилось, что Q равняется скалярному числу, то сложное перемещение исчезнетъ и слагаемыя перемещения взаимно уничтожатся.

Пусть мы имѣемъ нѣсколько винтовъ параметра нуль, $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \eta, \vartheta$ какъ угодно расположенныхъ въ пространствѣ. Бикватернионы $\beta/\alpha, \gamma/\beta, \dots, \vartheta/\eta, \alpha/\vartheta$ имѣютъ своими осями и углами линія кратчайшихъ разстояній и комплексные углы между α и β , β и γ, \dots, η и ϑ , ϑ и α . Произведеніе

$$(\alpha/\vartheta)(\vartheta/\eta) \dots (\gamma/\beta)(\beta/\alpha) = 1,$$

а потому мы приходимъ къ такой теоремѣ:

Теорема I. Если имѣемъ нѣсколько осей $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \eta, \vartheta$ какъ угодно расположенныхъ въ пространствѣ, то последовательные винтовые перемещенія $2[\alpha\beta], 2[\beta\gamma], \dots, 2[\eta\vartheta], 2[\vartheta\alpha]$, слагаясь, взаимно уничтожаются.

Припомнимъ ту фигуру изъ 18 прямыхъ, съ которой мы встрѣчались въ § 58 и ея свойство, выражающее законъ ассоциативности умноженія верзоровъ-бикватернионовъ. Сопоставляя это свойство съ предыдущей теоремой увидимъ, что законъ ассоциативности будетъ эквивалентъ слѣдующей теоремѣ:

Теорема II. Пусть $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6$ шесть, какъ угодно расположенныхъ въ пространствѣ, имѣющихъ определенное направление, осей. Построимъ линіи $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5, \epsilon_6$ кратчайшихъ разстояній: ϵ_1 между δ_1 и δ_2 , ϵ_2 между δ_2 и $\delta_3, \dots, \epsilon_6$ между δ_6 и δ_1 . Тогда, если три винтовыхъ перемещенія вокругъ первой, третьей и пятой изъ линій $\epsilon_1, \epsilon_3, \epsilon_5$ — на удвоенные комплексные углы между δ_1 и δ_2, δ_3 и δ_4, δ_5 и δ_6 отъ δ_1 къ δ_2 , отъ δ_3 къ δ_4 , отъ δ_5 къ δ_6 взаимно уничтожаются, то три винтовыхъ перемещенія вокругъ второй, четвертой и шестой изъ линій $\epsilon_2, \epsilon_4, \epsilon_6$ — на удвоенные комплексные углы между δ_2 и δ_3, δ_4 и δ_5, δ_6 и δ_1 отъ δ_2 къ δ_3 , отъ δ_4 къ δ_5 , отъ δ_6 къ δ_1 также взаимно уничтожаются.

Эта теорема можетъ быть обобщена слѣдующимъ образомъ.

Если мы имѣемъ $2n$ осей $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{2n}$ и вращенія $2[\delta_1 \delta_2], 2[\delta_3 \delta_4], \dots, 2[\delta_{2n-1} \delta_{2n}]$, слагаясь, взаимно уничтожаются, т. е.

$$2[\delta_1 \delta_2] + 2[\delta_3 \delta_4] + \dots + 2[\delta_{2n-1} \delta_{2n}] = 0,$$

то послѣдовательные вращенія $2[\delta_2 \delta_3], 2[\delta_4 \delta_5], \dots, 2[\delta_{2n} \delta_1]$ также взаимно уничтожаются, т. е.

$$2[\delta_2 \delta_3] + 2[\delta_4 \delta_5] + \dots + 2[\delta_{2n} \delta_1] = 0.$$

Какимъ образомъ можетъ быть доказана эта теорема, покажемъ въ слѣдующемъ параграфѣ.

76. *Обобщеніе доказательства Möbius'a закона ассоціативности умноженія верзоровъ-кватерніоновъ.* Мы видѣли въ § 74, что умноженіе двухъ верзоровъ-бикватерніоновъ и сложеніе двухъ конечныхъ винтовыхъ перемѣщений дѣйствія тожественны. Мы воспользовались этимъ обстоятельствомъ, чтобы помошью извѣстныхъ намъ свойствъ операций умноженія изучить законъ сложенія конечныхъ перемѣщений. Но мы можемъ воспользоваться имъ иначе: изслѣдовавъ независимо отъ операций $q(\quad)q^{-1}$ законъ сложенія конечныхъ перемѣщений и доказавъ, такимъ образомъ, его тожество съ умноженіемъ верзоровъ, мы можемъ помошью свойствъ операций сложенія перемѣщений изучать свойства операций умноженія.

Подобнымъ образомъ, какъ мы упоминали въ § 58, Möbius въ своей замѣткѣ „Neuer Beweis...“ [Werke B. 2] даѣтъ весьма простое доказательство закона ассоціативности умноженія верзоровъ-кватерніоновъ, показавъ, что эта послѣдняя операция эквивалентна сложенію двухъ вращеній вокругъ пересѣкающихся осей. Мы покажемъ теперь, какъ доказательство Möbius'a распространяется на бикватерніоны.

Означая вращеніе вокругъ положительного направлениія оси a на π черезъ $[\alpha]$, докажемъ сначала слѣдующую теорему [Wiener, Die Zusammensetzung zweier endlichen Schraubbungen gu einer einzigen. Berichte der Sächs. Ges. 1890]:

Два послѣдовательныхъ вращенія $[\alpha]$ и $[\beta]$ слагаются въ одно винтовое перемѣщеніе $2[\alpha\beta]$.

Въ самомъ дѣлѣ, линія кратчайшаго разстоянія между осями a и b послѣ вращеній $[\alpha]$ и $[\beta]$ приходитъ въ перво-

начальное положение и имѣть первоначальное направление. Слѣдовательно, винтовое движение, сложное изъ $[\alpha]$ и $[\beta]$, не будетъ менять ни положенія, ни направленія линіи кратчайшаго разстоянія, и потому эта линія будетъ служить его осью. Взявъ затѣмъ какую нибудь прямую, пересѣкающую линію кратчайшаго разстоянія подъ прямымъ угломъ, и отмѣтивъ ея положенія до перемѣщенія $[\alpha]$, послѣ этого перемѣщенія и наконецъ послѣ перемѣщенія $[\beta]$, увидимъ, что комплексный уголъ между ея первоначальнымъ положеніемъ и положеніемъ послѣ перемѣщеній будетъ $2(\alpha\beta)$. Этимъ угломъ и будетъ опредѣляться сложное перемѣщеніе.

Такимъ образомъ теорема доказана.

Легко видѣть, что два вращенія $[\alpha]$ и $[\beta]$ приводятъ неизмѣняемую систему въ ея первоначальное положеніе. Поэтому, въ результатѣ послѣдовательныхъ вращеній $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\gamma]$, $[\gamma]$, $[\alpha]$, где γ какая нибудь третья ось, система своего положенія не измѣнитъ. Эти шесть вращеній взаимно уничтожатся и мы можемъ написать:

$$[\alpha] + [\beta] + [\beta] + [\gamma] + [\gamma] + [\alpha] = 0.$$

Но сложеніе конечныхъ перемѣщеній есть операциѣ ассоціативная, и мы можемъ, сгруппировавъ вращенія по два, представить предыдущее равенство въ видѣ:

$$([\alpha] + [\beta]) + ([\beta] + [\gamma]) + ([\gamma] + [\alpha]) = 0.$$

И тогда, по только что доказанной теоремѣ, будемъ имѣть равенство:

$$2[\alpha\beta] + 2[\beta\gamma] + 2[\gamma\alpha] = 0,$$

выражающее частный случай теоремы I предыдущаго параграфа. Изъ него имѣемъ:

$$2[\alpha\beta] + 2[\beta\gamma] = 2[\alpha\gamma].$$

Это равенство и приводить насъ къ правилу сложенія конечныхъ перемѣщеній, данному въ § 74 и показываетъ, слѣдовательно, что построеніе, съ которымъ мы имѣемъ дѣло при умноженіи верзоровъ-бикватерніоновъ тождественно съ по-

строениемъ, которое должны выполнить при сложеніи двухъ конечныхъ винтовыхъ перемѣщений.

Такимъ образомъ, если A, A', A'' будутъ какіе либо три конечныхъ винтовыхъ перемѣщений и q, q', q'' три верзора-бикватерніона, которые по порядку имѣютъ своими осями оси перемѣщений A, A', A'' и углами половины комплексныхъ угловъ перемѣщения опредѣляющія, то построение сложнаго перемѣщенія:

$$(A + A') + A''$$

будетъ эквивалентно построенію верзора-бикватерніона $q''(q'q)$. Построеніе же перемѣщенія:

$$A + (A' + A'')$$

—построенію бикватерніона $(q''q')q$. Но операция сложенія конечныхъ перемѣщений есть операция ассоціативная: $(A + A') + A'' = A + (A' + A)$, а потому и $q''(q'q) = (q''q')q$.

Итакъ законъ ассоціативности умноженія верзоровъ-бикватерніоновъ и эквивалентна этому закону теорема о 18 прямыхъ доказаны.

Предъидущее доказательство можно видоизмѣнить еще такимъ образомъ. Мы видѣли, что теорема о 18 прямыхъ эквивалентна теоремѣ II § 75. Слѣдовательно, доказавъ эту послѣднюю, мы докажемъ и теорему о 18 прямыхъ и законъ ассоціативности умноженія верзоровъ.

Но теорему II мы можемъ формулировать такъ: если

$$2[\delta_1 \delta_2] + 2[\delta_2 \delta_4] + 2[\delta_3 \delta_6] = 0, \quad (65)$$

то

$$2[\delta_1 \delta_3] + 2[\delta_4 \delta_5] + 2[\delta_6 \delta_1] = 0; \quad (66)$$

и доказать ее это значитъ доказать, что отъ равенства (65) мы можемъ перейти къ равенству (66). Равенство же (65) по теоремѣ этого параграфа можно представить въ видѣ:

$$[\delta_1] + [\delta_2] + [\delta_3] + [\delta_4] + [\delta_5] + [\delta_6] = 0,$$

или, по той же теоремѣ и закону ассоциативности сложенія перемѣщеній, въ видѣ:

$$[\delta_1] + 2[\delta_2\delta_3] + 2[\delta_4\delta_5] + [\delta_6] = 0.$$

Прибавивъ къ обѣямъ частамъ вращеніе $[\delta_1]$, будемъ имѣть

$$[\delta_1] + 2[\delta_2\delta_3] + 2[\delta_4\delta_5] + 2[\delta_6\delta_1] = [\delta_1],$$

откуда и слѣдуетъ равенство (66).

Обобщеніе теоремы II § 75 можетъ быть доказано подобнымъ же образомъ.

77. Выводъ нѣкоторыхъ формулъ теоріи кватерніоновъ. Выведемъ теперь нѣсколько формулъ теоріи кватерніоновъ, которыя, какъ мы знаемъ, будутъ примѣнимы и въ винтовомъ счислении и понадобятся намъ въ дальнѣйшемъ изложеніи.

Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, какіе нибудь бивекторы. Изъ формулъ для $S\alpha\beta$ и $V\alpha\beta$ [см. §§ 35 и 39], мы имѣемъ

$$S\alpha\beta = S\beta\alpha, \quad V\alpha\beta = -V\beta\alpha. \quad (67)$$

Поэтому, $\alpha\beta = S\alpha\beta + V\alpha\beta, \beta\alpha = S\alpha\beta - V\alpha\beta,$

$$2S\alpha\beta = \alpha\beta + \beta\alpha, \quad 2V\alpha\beta = \alpha\beta - \beta\alpha. \quad (68)$$

Далѣе, $\alpha(\beta\gamma) = \alpha(S\beta\gamma + V\beta\gamma) = \alpha S\beta\gamma + \alpha V\beta\gamma$; но $\alpha S\beta\gamma$ есть бивекторъ, слѣдовательно

$$S\alpha\beta\gamma = S\alpha V\beta\gamma. \quad (69)$$

Также докажемъ, что $S\alpha\beta\gamma = SV\alpha\beta\cdot\gamma$. (70)

Замѣняя въ (68) β черезъ $V\beta\gamma$, имѣмъ:

$$2V\alpha V\beta\gamma = \alpha V\beta\gamma - V\beta\gamma\cdot\alpha.$$

Складывая это равенство съ тождествомъ $0 = \alpha S\beta\gamma - S\beta\gamma\cdot\alpha$, получаемъ:

$$\begin{aligned} 2V\alpha V\beta\gamma &= \alpha(S\beta\gamma + V\beta\gamma) - (S\beta\gamma + V\beta\gamma)\alpha = \alpha\beta\gamma - \beta\gamma\alpha \\ &= (\alpha\beta + \beta\alpha)\gamma - \beta(\gamma\alpha + \alpha\gamma) = 2S\alpha\beta\cdot\gamma - 2\beta S\gamma\alpha, \end{aligned}$$

откуда

$$VaV\beta\gamma = \gamma Sa\beta - \beta Sa\gamma, \quad (71)$$

равенство весьма важное при вычисленияхъ. Сложивъ его съ тожествомъ

$$VaS\beta\gamma = aS\beta\gamma,$$

находимъ $Va\beta\gamma = aS\beta\gamma - \beta S\gamma a + \gamma Sa\beta.$ (72)

Замѣнивъ въ (71) сначала a, β, γ , черезъ $Va\beta, \gamma, \delta$ а затѣмъ a, β, γ черезъ β, γ, δ получаемъ два равенства:

$$V(Va\beta.V\gamma\delta) = \delta Sa\beta\gamma - \gamma Sa\beta\delta, \quad (73)$$

$$V\beta V\gamma\delta = \delta S\beta\gamma - \gamma S\beta\delta,$$

изъ которыхъ второе, послѣ того какъ умножимъ его на a , сравнимъ скалярные части обѣихъ частей и замѣтимъ, что $SaV\beta V\gamma\delta = Sa\beta V\gamma\delta = SVa\beta V\gamma\delta$, даетъ

$$S(Va\beta.V\gamma\delta) = Sa\delta S\beta\gamma - Sa\gamma S\beta\delta. \quad (74)$$

78. Различные выражения для $Sa\beta\gamma$. Пусть $a = xi + yj + zk$, $\beta = x'i + y'j + z'k$ и $\gamma = x''i + y''j + z''k$, гдѣ $x = p + \omega a$, $y = q + \omega b$, $z = r + \omega c$; $x' = p_1 + \omega a_1$, $y' = q_1 + \omega b_1$, $z' = r_1 + \omega c_1$; $x'' = p_2 + \omega a_2$, $y'' = q_2 + \omega b_2$, $z'' = r_2 + \omega c_2$. Составляя помощью формулы (69) $Sa\beta\gamma$, находимъ

$$Sa\beta\gamma = - \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}, \quad (75)$$

откуда видимъ, что $Sa\beta\gamma$ мѣняетъ знакъ всакій разъ, когда мы переставляемъ два множителя, такъ что

$$Sa\beta\gamma = -Sa\gamma\beta = S\gamma a\beta = -S\gamma\beta a = S\beta\gamma a = -S\beta a\gamma.$$

Пользуясь соотношеніемъ $Sa\beta\gamma = SVa\beta\gamma$, въ которомъ, замѣняемъ сначала $Va\beta$ черезъ $TaT\beta sn\theta$, гдѣ $\theta = \theta_0 + \omega \theta_1$, комплексный уголъ между осями α и β , а потомъ $S\epsilon\gamma$ че-

результатъ $T\gamma cs\psi$, где $\psi = \psi_0 + \omega\psi_1$, комплексный уголъ между α и γ , получаемъ для $S\alpha\beta\gamma$ другое выражение:

$$S\alpha\beta\gamma = -T\alpha T\beta T\gamma sn\theta cs\psi. \quad (76)$$

Наконецъ, если возвысимъ равенство (72) почленно въ квадратъ и припомнимъ, что $(Sq)^2 = (Tq)^2 + (Vq)^2$ [см. (16) § 21], получимъ для $S\alpha\beta\gamma$ третье выражение:

$$\begin{aligned} S^2\alpha\beta\gamma &= T^2\alpha T^2\beta T^2\gamma + \alpha^2 S^2\beta\gamma + \\ &\quad \beta^2 S^2\gamma\alpha + \gamma^2 S^2\alpha\beta - 2S\beta\gamma S\gamma\alpha S\alpha\beta. \end{aligned} \quad (77)$$

Первое изъ выражений для $S\alpha\beta\gamma$, (75), даетъ возможность вычислить $S\alpha\beta\gamma$, когда даны прямоугольные координаты бивекторовъ α , β и γ ; изъ втораго, (76), найдемъ $S\alpha\beta\gamma$, если будутъ известны $T\alpha$, $T\beta$, $T\gamma$ и углы θ и ψ ; наконецъ третье, (77), дастъ $S\alpha\beta\gamma$, если будемъ знать $T\alpha$, $T\beta$, $T\gamma$ и комплексные углы между осями α , β и γ . Развернувъ (75) и (77) и предположивъ въ послѣдней для простоты $T\alpha = T\beta = T\gamma = 1$, получаемъ:

$$S_0\alpha\beta\gamma = - \begin{vmatrix} p & q & r \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}, \quad (78)$$

$$S_1\alpha\beta\gamma = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p & q & r \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p & q & r \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad (79)$$

$$\begin{aligned} S_0^2\alpha\beta\gamma &= 1 - cs^2(\beta\gamma)_0 - cs^2(\gamma\alpha)_0 - cs^2(\alpha\beta)_0 \\ &\quad + 2cs(\beta\gamma)_0 cs(\gamma\alpha)_0 cs(\alpha\beta)_0, \end{aligned} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} S_0\alpha\beta\gamma \cdot S_1\alpha\beta\gamma &= (\beta\gamma)_1 sn(\beta\gamma)_0 [cs(\beta\gamma)_0 - cs(\gamma\alpha)_0 cs(\alpha\beta)_0] \\ &\quad + (\gamma\alpha)_1 sn(\gamma\alpha)_0 [cs(\gamma\alpha)_0 - cs(\alpha\beta)_0 cs(\beta\gamma)_0] \\ &\quad + (\alpha\beta)_1 sn(\alpha\beta)_0 [cs(\alpha\beta)_0 - cs(\beta\gamma)_0 cs(\gamma\alpha)_0], \end{aligned} \quad (81)$$

гдѣ $S_0\alpha\beta\gamma$ есть главная часть, а $S_1\alpha\beta\gamma$ —моментъ $S\alpha\beta\gamma$, такъ что $S\alpha\beta\gamma = S_0\alpha\beta\gamma + \omega S_1\alpha\beta\gamma$, и $(\alpha\beta)_1 = (\alpha\beta)_0 + \omega(\alpha\beta)_1$ и т. д. суть комплексные углы между осями α и β , и т. д..

Но изъ формулы (85) параграфа 80 видно, что выражение, стоящія въ скобкахъ [], будуть по порядку $-sn(\gamma\alpha)_0 \times sn(\alpha\beta)_0 cs(\beta'\gamma')_0, -sn(\alpha\beta)_0 sn(\beta\gamma)_0 cs(\gamma'\alpha')_0, -sn(\beta\gamma)_0 sn(\gamma\alpha)_0 \times cs(\alpha'\beta')_0$, и потому

$$S_a \alpha \beta \gamma S_a \alpha \beta \gamma = -sn(\beta\gamma)_0 sn(\gamma\alpha)_0 sn(\alpha\beta)_0 \times \\ [(\beta\gamma)_1 cs(\beta'\gamma')_0 + (\gamma\alpha)_1 cs(\gamma'\alpha')_0 + (\alpha\beta)_1 cs(\alpha'\beta')_0]. \quad (82)$$

Равенства (76) развертывать не будемъ, но, взявъ параметры отъ обѣихъ частей его, выведемъ выраженіе для $PSa\beta\gamma$:

$$PSa\beta\gamma = Pa + Pb + Py + \theta_1 ctg\theta_0 - \psi_1 tg\psi_0. \quad (83)$$

79. Случай, когда $Sa\beta\dot{\gamma} = 0$, или $PSa\beta\gamma = \infty$. Изъ формулы (76) легко выводятся условія, при которыхъ $PSa\beta\gamma = \infty$, или $Sa\beta\dot{\gamma} = 0$.

Для того, чтобы P произведенія нѣсколькихъ комплексныхъ чиселъ обратился въ бесконечность, необходимо и достаточно, чтобы параметръ одного и только одного множителя былъ равенъ ∞ .

Поэтому $PSa\beta\gamma = \infty$, 1) если $Pa, Pb, Py, Ps\psi$ конечны и $Ps\pi\theta = \infty$, т. е. если оси бивекторовъ параллельны одной плоскости, но не принадлежать одной щеткѣ; 2) если $Pa, Pb, Py, Ps\pi\theta$ конечны, но $Ps\psi = \infty$, т. е. если опять оси α, β, γ , будучи параллельны одной плоскости, не лежатъ на одной щеткѣ; этотъ случай тождественъ съ предыдущимъ; 3) если P одного изъ бивекторовъ бесконечно велико, но $Ps\pi\theta$ и $Ps\psi$ конечны, т. е. если оси α, β, γ не параллельны одной плоскости и параметръ одного изъ нихъ бесконечно великъ.

Итакъ, $PSa\beta\gamma = \infty$ въ двухъ случаяхъ 1) если Pa, Pb, Py конечны и оси α, β, γ , будучи параллельны одной плоскости, не лежатъ на одной и той же щеткѣ и 2) если одинъ изъ параметровъ Pa, Pb, Py бесконечно великъ, и оси α, β, γ не параллельны одной плоскости.

Для того, чтобы произведеніе нѣсколькихъ комплексныхъ чиселъ обратилось въ нуль необходимо и достаточно, чтобы одинъ изъ множителей былъ равенъ нулю, или чтобы параметры хотя двухъ множителей были равны бесконечности. Поэтому, если мы предположимъ сначала, что ни одинъ изъ бивекторовъ не имѣеть бесконечно большаго параметра, то

$Sa\beta\gamma$ можетъ обратиться въ нуль въ трехъ случаяхъ, 1) когда $cs\psi = 0$, т. е. когда ось γ пересекаетъ ε подъ прямымъ угломъ; 2) когда $sn\theta = 0$, т. е. оси α и β совпадаютъ и въ 3) когда $P_{c\psi} = P_{sn\theta} = \infty$ т. е. когда оси α и β параллельны и ось γ перпендикулярна къ направлению линій кратчайшихъ разстояній между осями α и β .

Легко видѣть, что во всѣхъ трехъ случаяхъ оси бивекторовъ α, β, γ принадлежать одной и той же щеткѣ, ибо, когда онѣ параллельны между собой, что возможно въ случаѣ третьемъ, мы можемъ считать ихъ также принадлежащими одной щеткѣ съ безконечно удаленной осью. Обратно, когда оси имѣютъ общую линію кратчайшаго разстоянія, или параллельны, т. е. принадлежать одной и той же щеткѣ, то имѣть мѣсто одинъ изъ вышеуказанныхъ случаевъ и $Sa\beta\gamma = 0$.

Положимъ, что параметръ одного изъ бивекторовъ α, β, γ , напримѣръ γ , безконечно великъ; тогда $Sa\beta\gamma$ обращается въ нуль въ двухъ случаяхъ, 1) когда $P_{c\psi} = \infty$, т. е. направление оси γ перпендикулярно къ линіи кратчайшаго разстоянія между осями α и β ; вслѣдствіе неопределенности положенія оси γ , мы можемъ считать, что оси α, β, γ принадлежать одной щеткѣ; 2) когда $P_{sn\theta} = \infty$, т. е. когда оси α и β параллельны.

Наконецъ, когда параметры двухъ или трехъ изъ бивекторовъ α, β, γ безконечно велики, или хотя одинъ изъ бивекторовъ α, β, γ исчезаетъ, то $Sa\beta\gamma = 0$. Исключая послѣдній случай, мы приходимъ, слѣдовательно, къ такому заключенію:

$Sa\beta\gamma = 0$, 1) если R_a, R_β, R_γ конечны и оси α, β, γ принадлежатъ одной и той же щеткѣ, 2) если параметръ одного изъ бивекторовъ безконечно великъ и оси двухъ другихъ параллельны и въ 3) если параметры хотя двухъ изъ α, β, γ безконечно велики.

Изъ предыдущихъ двухъ теоремъ заключаемъ:

Если параметры бивекторовъ α, β, γ конечны, то $Sa\beta\gamma = 0$ только тогда, когда оси ихъ принадлежатъ одной и той же щеткѣ и $PSa\beta\gamma = \infty$ только тогда, когда оси параллельны одной и той же плоскости, но не имѣютъ общей линіи кратчайшаго разстоянія.

80. Косыя координаты бивектора и его составляющая; дополнительная координатная система. Зависимость между проекциями и составляющими бивектора. Если мы имѣемъ

три бивектора α, β, γ и три комплексныхъ числа a, b, c то бивекторъ $\varrho = a\alpha + b\beta + c\gamma$ можетъ быть нами построенъ. Обратно, мы сейчасъ покажемъ, что при условіи $Sa\beta\gamma \neq 0$ и $PSa\beta\gamma = \infty$, каковъ бы ни былъ бивекторъ ϱ , мы всегда можемъ опредѣлить такихъ три комплексныхъ числа a, b, c что $\varrho = a\alpha + b\beta + c\gamma$. Для доказательства замѣнимъ въ формулѣ (73) одинъ разъ β, γ, δ черезъ ϱ, β, γ , а въ другой $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ че-резъ $\beta, \gamma, \alpha, \varrho$; тогда будемъ имѣть два равенства

$$V.V\alpha\varrho V\beta\gamma = \gamma Sa\beta\varrho - \beta Sa\gamma\varrho,$$

$$V.V\beta\gamma V\alpha\varrho = \varrho S\beta\gamma\alpha - aS\beta\gamma\varrho,$$

изъ которыхъ, замѣчая, что $V.V\alpha\varrho.V\beta\gamma = -V.V\beta\gamma.V\alpha\varrho$, получаемъ:

$$\varrho Sa\beta\gamma = aS\beta\gamma\varrho + \beta S\gamma\alpha\varrho + \gamma Sa\beta\varrho. \quad (84)$$

Вслѣдствіе предположенія, сдѣланнаго относительно $Sa\beta\gamma$, числа:

$$a = \frac{S\beta\gamma\varrho}{Sa\beta\gamma}, \quad b = \frac{S\gamma\alpha\varrho}{Sa\beta\gamma}, \quad c = \frac{Sa\beta\varrho}{Sa\beta\gamma},$$

будутъ вполнѣ опредѣленны, и теорема такимъ образомъ доказана.

Итакъ по даннымъ a, b, c можно построить бивекторъ ϱ , и обратно по данному бивектору ϱ вполнѣ опредѣляются числа a, b, c и притомъ однозначно. Три числа a, b, c будемъ называть косыми координатами бивектора ϱ ; бивекторы α, β, γ координатными бивекторами, а ихъ совокупность координатной системой; бивекторы $a\alpha, b\beta, c\gamma$ — геометрическими и числа $aT\alpha, bT\beta, cT\gamma$ — алгебраическими составляющими бивектора ϱ по осамъ α, β, γ . Когда изъ смысла рѣчи видно, идетъ ли дѣло объ алгебраическихъ, или геометрическихъ составляющихъ, тѣ и другія, безразлично, будемъ называть просто составляющими.

Систему бивекторовъ $\alpha' = V\beta\gamma, \beta' = V\gamma\alpha, \gamma' = V\alpha\beta$ будемъ называть дополнительной системой. Когда намъ даны бивекторы α, β, γ , то легко построимъ дополнительную систему

и вычислимъ $S\alpha'\beta'\gamma'$, $PS\alpha'\beta'\gamma'$ и комплексные углы, которые оси α', β', γ' образуютъ между собой и съ осями α, β, γ , пользуясь слѣдующими формулами:

$$S\beta'\gamma' = \alpha^*S\beta\gamma - S\gamma\alpha S\alpha\beta,$$

$$S\alpha\alpha' = S\alpha\beta\gamma,$$

$$S\gamma'\alpha' = \beta^*S\gamma\alpha - S\alpha\beta S\beta\gamma, \quad (85)$$

$$S\beta\beta' = S\alpha\beta\gamma, \quad (86)$$

$$S\alpha'\beta' = \gamma^*S\alpha\beta - S\beta\gamma S\gamma\alpha,$$

$$S\gamma\gamma' = S\alpha\beta\gamma,$$

$$S\alpha'\beta'\gamma' = SV\alpha'\beta'V\alpha\beta = -S^*\alpha\beta\gamma, \quad (87)$$

$$PS\alpha'\beta'\gamma' = 2PS\alpha\beta\gamma,$$

которые легко выводятся помошью формулы (74).

Изъ послѣднихъ двухъ формулъ слѣдуетъ, что условія $S\alpha\beta\gamma \neq 0$ и $PS\alpha\beta\gamma \neq \infty$ влекутъ за собой неравенства $S\alpha'\beta'\gamma' \neq 0$ и $PS\alpha'\beta'\gamma' \neq \infty$. Мы можемъ, поэтому, бивекторы α', β', γ' принять за координатную систему бивекторовъ и относительно ихъ опредѣлить координаты u, v, w бивектора ϱ . По формулѣ (84) мы имѣемъ

$$\varrho S\alpha'\beta'\gamma' = \alpha' S\beta'\gamma' \varrho + \beta' S\gamma'\alpha' \varrho + \gamma' S\alpha'\beta' \varrho$$

Но по формулѣ (74), $S\beta'\gamma' \varrho = SV\gamma\alpha. V\gamma' \varrho = -S\alpha\varrho$. $S\alpha\beta\gamma$; подобнымъ же образомъ найдемъ $S\gamma'\alpha' \varrho = -S\beta\varrho. S\alpha\beta\gamma$ и $S\alpha'\beta' \varrho = -S\gamma\varrho. S\alpha\beta\gamma$, и слѣдовательно

$$\varrho S\alpha\beta\gamma = \alpha' S\alpha\varrho + \beta' S\beta\varrho + \gamma' S\gamma\varrho, \quad (88)$$

откуда видно, что координаты бивектора ϱ относительно α', β', γ' будутъ

$$u = \frac{S\alpha\varrho}{S\alpha\beta\gamma}, \quad v = \frac{S\beta\varrho}{S\alpha\beta\gamma}, \quad w = \frac{S\gamma\varrho}{S\alpha\beta\gamma}.$$

Пользуясь дополнительной системой координатъ, мы можемъ представить въ весьма простомъ видѣ составляющія $aT\alpha, bT\beta, cT\gamma$ бивектора ϱ на осяхъ α, β, γ . Въ самомъ дѣлѣ, составивъ по (76) § 78 выраженія для $S\alpha\beta\gamma$ и $S\alpha\beta\varrho$:

$$S\alpha\beta\gamma = -TaT\beta T\gamma sn(\beta\gamma) cs(\alpha\alpha'),$$

$$S\beta\gamma\varrho = -T\beta T\gamma T\alpha sn(\beta\gamma) cs(\alpha'\varrho),$$

получаетъ первую изъ формулъ:

$$\begin{aligned} aT\alpha &= T_Q \cos(\alpha'Q) : \cos(\alpha\alpha'), \\ bT\beta &= T_Q \cos(\beta'Q) : \cos(\beta\beta'), \\ cTy &= T_Q \cos(\gamma'Q) : \cos(\gamma\gamma'). \end{aligned} \quad (89)$$

Двѣ другія формулы найдутся подобнымъ же образомъ. Эти формулы легко выводятся помошью теоремы § 63 (Ср. Сомовъ, Кинематика, стр. 150).

Чтобы по даннымъ a, b, c найти u, v, w и наоборотъ, умножимъ равенство $Q = aa + b\beta + cy$ послѣдовательно на α, β, y , и равенство $Q = ua' + vb' + wy'$ на α', β', y' и возьмемъ скалярныя части полученныхъ равенствъ. Тогда будемъ имѣть уравненія:

$$\begin{aligned} SaQ &= aa^2 + bSa\beta + cSy\alpha, \\ S\beta Q &= aSa\beta + b\beta^2 + cS\beta\gamma, \\ S\gamma Q &= aSy\alpha + bS\beta\gamma + cy^2, \end{aligned} \quad (90)$$

$$\begin{aligned} S\beta\gamma Q &= Sa'Q = ua'^2 + vSa'\beta' + wSy'\alpha', \\ S\gamma\alpha Q &= S\beta'Q = uSa'\beta' + v\beta'^2 + wS\beta'\gamma', \\ Sa\beta Q &= S\gamma'Q = uSy'\alpha' + vS\beta'\gamma' + w\gamma'^2, \end{aligned} \quad (91)$$

которые стоятъ только раздѣлить на $Sa\beta\gamma$, чтобы имѣть искомыя соотношенія. Вторую группу получаемъ изъ первой, рѣшая ее относительно a, b, c . Если въ эти уравненія введемъ составляющія бивектора Q по осямъ α, β, y и его проекціи на эти оси, то увидимъ полное тождество уравненій (90) и (91) съ известными соотношеніями между проекціями и составляющими вектора (Сомовъ, I. с., глава VIII).

Если $Q = aa + b\beta$, и слѣдовательно координата $c = Sa\beta Q = 0$, то оси бивекторовъ α, β, Q по теоремѣ предъидущаго параграфа будутъ принадлежать одной и той же щеткѣ, осью которой служить ось y' . Обратно, если ось бивектора Q принадлежитъ щеткѣ y' , то $c = Sa\beta Q = 0$ и $Q = aa + b\beta$. Такимъ образомъ, если числамъ a и b мы будемъ давать какіе угодно значенія, всѣ бивекторы $Q = aa + b\beta$ будутъ принадлежать одной и той же щеткѣ, и всякий бивекторъ этой щетки мы получимъ, если выберемъ для чиселъ a и b падлежащія значенія.

81. Векторное и скалярное произведение и относительный момент двухъ бивекторов въ косыхъ координатахъ. Пусть кроме бивектора σ мы имѣемъ бивекторъ $\sigma' = a'\alpha + b'\beta + c'\gamma$. Возвышенія σ въ квадратъ и перемножая σ и σ' , находимъ:

$$\sigma^2 = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 + 2bcS\beta\gamma + 2caS\gamma\alpha + 2abSa\beta, \quad (92)$$

$$S\sigma\sigma' = aa'\alpha^2 + bb'\beta^2 + cc'\gamma^2 + (bc' + b'c)S\beta\gamma + (ca' + c'a)S\gamma\alpha + (ab' + a'b)Sa\beta, \quad (93)$$

$$V\sigma\sigma' = (bc' - b'c)V\beta\gamma + (ca' - c'a)V\gamma\alpha + (ab' - a'b)V\alpha\beta, \quad (94)$$

изъ которыхъ первыя двѣ аналогичны формуламъ аналитической геометріи, помошью которыхъ опредѣляются длина вектора и геометрическое произведение двухъ векторовъ, а послѣдняя даетъ координаты $V\sigma\sigma'$ относительно дополнительной системы. Положивъ для простоты въ (93) $T\alpha = T\beta = T\gamma = 1$ и означивъ углы ($\beta\gamma$), ($\gamma\alpha$), ($\alpha\beta$) соотвѣтственно черезъ $\varphi_1 + \omega d_1$, $\varphi_2 + \omega d_2$, $\varphi_3 + \omega d_3$, мы получаемъ для относительного момента бивекторовъ σ и σ' (коффиціентъ при $-\omega$ въ $S\sigma\sigma'$) такое выраженіе:

$$\begin{aligned} & a_0a_1' + b_0b_1' + c_0c_1' + a_1a_0' + b_1b_0' + c_1c_0' \\ & + cs\varphi_1(b_0c_1' + c_0b_1' + b_0'c_1 + c_0'b_1) \\ & + cs\varphi_2(c_0a_1' + a_0c_1' + c_0'a_1 + a_0'c_1) \\ & + cs\varphi_3(a_0b_1' + b_0a_1' + a_0'b_1 + b_0'b_1) \\ & - (b_0c_0' + c_0b_0')d_1sn\varphi_1 - (c_0a_0' + a_0c_0')d_2sn\varphi_2 \\ & - (a_0b_0' + b_0a_0')d_3sn\varphi_3. \end{aligned}$$

Для $S\sigma\sigma'$ и относительного момента двухъ бивекторовъ σ и σ' получаются весьма простыя выраженія, если мы одинъ изъ нихъ опредѣлимъ составляющими, а другой проекціями на координатныя оси α, β, γ , иначе говоря, если одинъ изъ нихъ отнесемъ къ системѣ α, β, γ , а другой къ дополнительной α', β', γ' . Дѣйствительно, перемножая равенства

$$\begin{aligned} \sigma Sa\beta\gamma &= \alpha S\beta\gamma\sigma + \beta S\gamma\alpha\sigma + \gamma S\alpha\beta\sigma, \\ \sigma Sa\beta\gamma &= \alpha'Sa\sigma + \beta'S\beta\sigma + \gamma'S\gamma\sigma, \end{aligned} \quad (95)$$

п сравнивая скалярные части обеих частей, имеемъ:

$$S\alpha\sigma S\alpha\beta\gamma = S\alpha\sigma S\beta\gamma\sigma + S\beta\sigma S\gamma\alpha\sigma + S\gamma\sigma S\alpha\beta\sigma \quad (96)$$

или, припоминая значение a, b, c ,

$$S\alpha\sigma = aS\alpha\sigma + bS\beta\sigma + cS\gamma\sigma, \quad (97)$$

или, ваконецъ, означая $S\alpha\sigma, S\beta\sigma, \gamma\sigma$, черезъ x, y, z ,

$$S\alpha\sigma = ax + by + cz. \quad (98)$$

Разворачивая это равенство, получаемъ для относительного момента такое весьма простое выражение:

$$-(a_0x_1 + b_0y_1 + c_0z_1 + a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0). \quad (99)$$

Представивъ равенство (97) въ видѣ:

$$S\alpha\sigma = -[aT\alpha][T\beta\cos(\alpha\beta)] - [bT\beta][T\beta\cos(\beta\sigma)] - [cT\gamma][T\beta\cos(\gamma\sigma)]$$

видимъ, что геометрическое произведение двухъ бивекторовъ равняется суммѣ произведений составляющихъ одного бивектора, умноженныхъ на соответствующія проекціи другаго [ср. Сомовъ, I. с.].

Изъ предыдущихъ формулъ можно получить еще пять выражений для относительного момента бивекторовъ α и σ , если введемъ углы и кратчайшія разстоянія между осями $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$, α и σ .

82. *Преобразование геометрии связки въ геометрию линейчатаго пространства.* До сихъ поръ мы старались выяснить какой смыслъ имѣютъ прямоугольныя, косоугольныя и полярныя координаты точки, проекціи и составляющія вектора, когда они становятся комплексными числами вида $a_0 + \omega a_1$. Мы показали, что формулы преобразованія Декартовыхъ координатъ точекъ при комплексныхъ параметрахъ, опредѣляющихъ положеніе новой системы координатъ, переходятъ въ формулы преобразованія Plucker'овыхъ или прямоугольныхъ координатъ бивектора. Попутно мы изучили операцию $q(\) q^{-1}$ и вспнулись вопроса о конечныхъ винтовыхъ перемѣщеніяхъ,

тѣсно связанного съ формулами преобразованія координатъ, причемъ мы видѣли, что вращенія вокругъ пересѣкающихся осей переходятъ въ конечныя винтовыя перемѣщенія, когда параметры, вращенія опредѣляющія, становятся комплексными.

Мы перейдемъ теперь къ приложениюмъ иного характера, а именно къ изученію помощью метода перенесенія нѣкоторыхъ геометрическихъ фигуръ и формъ, составленныхъ изъ конечнаго или безконечнаго числа бивекторовъ, при чемъ мы остановимся на простѣйшихъ, какъ то на тѣхъ фигурахъ и формахъ, въ которыхъ преобразуются прямая, плоскость, связка, пучекъ и т. п..

Три вещественныхъ числа x,y,z , которыхъ мы принимали выше или за координаты точекъ, или за проекціи вектора мы можемъ разсматривать какъ однородныя координаты луча связки, имѣющей начало координатъ своимъ центромъ. Плоскость связки будетъ многообразіемъ лучей, координаты которыхъ удовлетворяютъ уравненію $ux+vy+wz=0$; u,v,w суть координаты плоскости.

Пусть теперь x,y,z становятся комплексными числами; они опредѣлять вѣкоторый бивекторъ α , имѣющій прямую α' своею осью. Для всѣхъ бивекторовъ, которые имѣютъ своими координатами ax,ay,az , где $a=a_0+\omega a_1$, осью будетъ служить та же прямая α' , а потому x,y,z мы можемъ разсматривать какъ однородныя комплексныя координаты луча α' въ пространствѣ.

Многообразіе лучей α' пространства, однородныя координаты которыхъ удовлетворяютъ ур. $ux+vy+wz=0$, где $u=u_0+\omega u_1$, $v=v_0+\omega v_1$, $w=w_0+\omega w_1$, образуютъ щетку, осью которой служить лучъ β' съ координатами u,v,w . Дѣйствительно, если β и α суть два бивектора, имѣющіе своими координатами u,v,w и x,y,z соответственно, то уравненіе $ux+vy+wz=0$ можемъ представить въ видѣ $S\beta\alpha=0$, и изъ теоремы § 38 будеть слѣдоватъ, что ось бивектора α , т. е. лучъ α' пересѣкаеть подъ прямымъ угломъ ось бивектора β , т. е. лучъ β' . Обратно, если лучъ α' встрѣчаетъ подъ прямымъ угломъ лучъ β' , то $S\beta\alpha=ux+vy+wz=0$.

Такимъ образомъ, уравненіе вида $ux+vy+wz=0$ опредѣляетъ щетку и три комплексныхъ числа u,v,w , которая служать однородными координатами луча β' —оси щетки, мы можемъ назвать однородными координатами щетки.

Углы θ и ϑ между двумя лучами $\alpha'(x,y,z)$ и $\alpha''(x',y',z')$ и двумя плоскостями $\beta'(u,v,w)$ и $\beta''(u',v',w')$ связки определяются формулами: (4) § 61 и

$$\cos \theta = \frac{uu' + vv' + ww'}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}}. \quad (100)$$

Если же $x,y,z; x',y',z'$; $u,v,w; u',v',w'$ сдѣлаются комплексными, то формула (4) § 61 опредѣлить комплексный уголъ между лучами $\alpha'(x,y,z)$ и $\alpha''(x'y'z')$ пространства, а формула (100) комплексный уголъ между осами β' и β'' щетокъ $\beta'(u,v,w)$ и $\beta''(u',v',w')$. Итакъ, мы можемъ резюмировать сказанное слѣдующимъ образомъ.

Когда однородные координаты луча и плоскости связки становятся комплексными, лучъ связки преобразуется въ лучъ пространства, плоскость связки—въ щетку, уголъ между двумя лучами связки—въ комплексный уголъ между лучами въ пространстве, а уголъ между плоскостями—въ комплексный уголъ между осами щетокъ. Методомъ раздвиганія теоремы геометрии связки преобразуется въ теоремы геометрии линейчатаго пространства.

Къ этой теоремѣ мы приходимъ также путемъ нѣсколько другихъ соображеній.

Представимъ себѣ связку, т. е. совокупность прямыхъ и плоскостей, проходящихъ черезъ нѣкоторую точку, центръ связки. Пусть α есть какой нибудь векторъ, имѣющій центръ связки своимъ началомъ. Этотъ векторъ, равно какъ и всѣ векторы $a\alpha$, где a какое нибудь вещественное число опредѣлять одинъ и тотъ же лучъ, на которомъ они всѣ лежать, и который мы назовемъ „лучъ α “, или „прямая α “, или „ось α “.

Бивекторъ α опредѣлить нѣкоторую прямую въ пространствѣ—ось бивектора α , которую мы будемъ называть „лучъ α “, или „ось α “, или „прямая α “. Всѣ бивекторы $a\alpha$, где a есть какое угодно комплексное число имѣютъ общую ось и, слѣдовательно, всѣ они опредѣляютъ одну и ту же прямую α .

Пусть α и β два вектора связки. Если двумъ вещественнымъ числамъ a и b будемъ давать всѣвозможныя значенія, то совокупность лучей $\rho = a\alpha + b\beta$ образуетъ пучекъ лучей. Всѣ они лежать въ плоскости (α, β) ; прямая связки, перпен-

дикулярная къ плоскости, т. е. лучъ $V\alpha\beta$ служить осью плоскости.

Если α и β два бивектора то лучи $\rho = \alpha a + b\beta$, где a и b какіе угодно комплексные числа образуютъ щетку [см. § 80], осью которой служить лучъ $V\alpha\beta$, т. е. линія кратчайшаго разстоянія между осами α и β .

Такимъ образомъ мы снова приходимъ къ тому заключенію, что методомъ перенесенія лучи связки преобразуются въ лучи пространства, а пучки прямыхъ и плоскости, въ которыхъ они лежать, въ щетки.

Щетка, какъ видимъ, должна быть аналогична по своимъ свойствамъ съ одной стороны съ пучкомъ лучей, а съ другой — съ плоскостью. Разсмотримъ сначала щетку, какъ геометрическую форму. аналогичную пучку.

83. Геометрія щетки, ангармоническое отношение четырехъ лучей щетки. Представимъ себѣ безчисленное множество пучковъ, наложенныхъ одинъ на другой такимъ образомъ, что центры ихъ совпадаютъ; они составятъ тогда одинъ пучекъ. Отдѣлимъ эти пучки одинъ отъ другого и раздвинемъ ихъ по направлению перпендикулярному къ ихъ общей плоскости. Тогда мы получимъ щетку. Такимъ образомъ, щетку, если угодно, мы можемъ назвать раздвинутымъ пучкомъ.

Съ однимъ изъ основныхъ понятій геометріи щетки, съ понятіемъ объ комплексномъ углѣ между двумя лучами щетки мы уже знакомы. Введемъ теперь другое основное понятіе, понятіе объ ангармоническомъ отношеніи четырехъ лучей щетки

Пусть мы имѣемъ четыре луча $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ нѣкоторой щетки. Припишемъ оси щетки опредѣленное направлениe и означимъ черезъ $(\alpha\gamma)$, $(\gamma\beta)$, $(\alpha\delta)$ и $(\delta\beta)$ комплексные углы между лучами α и γ , γ и β , α и δ , δ и β относительно этого направлениa. Комплексное число

$$g = \frac{sn'(\alpha\gamma)}{sn(\gamma\beta)} : \frac{sn(\alpha\delta)}{sn(\delta\beta)} \quad (101)$$

будемъ называть ангармоническимъ отношеніемъ лучей $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и означать черезъ $(\alpha\beta\gamma\delta)$. Если условимся, кроме того, углы между осами α и γ , γ и β , α и δ , δ и β означить черезъ $(\alpha\gamma)_0$, $(\gamma\beta)_0$, $(\alpha\delta)_0$, $(\delta\beta)_0$, точки пересѣченія лучей $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

съ осью щетки черезъ A, B, C, D , то легко будетъ видѣть, что главною частью ангармонического отношенія $(\alpha\beta\gamma\delta)$ будетъ:

$$g_0 = (\alpha\beta\gamma\delta)_0 = \frac{sn(\alpha\gamma)_0}{sn(\gamma\beta)_0} : \frac{sn(\alpha\delta)_0}{sn(\delta\beta)_0}, \quad (102)$$

а параметромъ

$$\begin{aligned} Pg = P(\alpha\beta\gamma\delta) = & [ACctg(\alpha\gamma)_0 - CBctg(\gamma\beta)_0] \\ & - [ADctg(\alpha\delta)_0 - DBctg(\delta\beta)_0] \end{aligned} \quad (103)$$

Если мы проведемъ плоскость перпендикулярную къ оси щетки и спроектируемъ на нее лучи $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ то углы между проекциями α и γ , γ и β , α и δ , δ и β , очевидно будутъ $(\alpha\gamma)_0$, $(\gamma\beta)_0$, $(\alpha\delta)_0$, $(\delta\beta)_0$; слѣдовательно, главная часть ангармонического отношенія лучей $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ будетъ ангармоническимъ отношеніемъ соотвѣтствующихъ ихъ проекцій на плоскость перпендикулярную къ оси щетки.

Въ частномъ случаѣ, когда лучи $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ будутъ параллельны, главною частью $(\alpha\beta\gamma\delta)$ будетъ:

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB},$$

т. е. ангармоническое отношеніе $(ABCD)$ четырехъ точекъ A, B, C, D , а моментъ $(\alpha\beta\gamma\delta)$ будетъ неопределеннымъ. Въ томъ же случаѣ, когда всѣ лучи $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ лежатъ въ одной плоскости перпендикулярной къ оси, мы получаемъ

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{sn(\alpha\gamma)_0}{sn(\gamma\beta)_0} : \frac{sn(\alpha\delta)_0}{sn(\delta\beta)_0},$$

и слѣдовательно моментъ ангармонического отношенія обращается въ нуль.

Если намъ даны три луча α, β, γ и ангармоническое отношеніе $(\alpha\beta\gamma\delta)$, то можно построить лучъ δ . Въ самомъ дѣлѣ изъ уравненій: (102) и $(\alpha\delta)_0 + (\delta\beta)_0 = (\alpha\beta)_0$ мы можемъ определить углы $(\alpha\delta)_0$ и $(\delta\beta)_0$; уравненіе же (103) вмѣстѣ съ $AD + DB = AB$ даетъ намъ AD и DB . Величины AD и $(\alpha\delta)_0$ вполнѣ опредѣляютъ положеніе луча δ .

Ангармоническое отношение может быть представлено въ другой весьма удобной формѣ. Означивъ черезъ γ винтъ параметра нуль, которому осью служить ось щетки, имеемъ $V\alpha\gamma = T\alpha T\gamma sn(\alpha\gamma)\eta$, $V\gamma\beta = T\gamma T\beta sn(\gamma\beta)\eta$, $V\alpha\delta = T\alpha T\delta \times sn(\alpha\delta)\eta$, $V\delta\beta = T\delta T\beta sn(\delta\beta)\eta$ и слѣдовательно

$$g = (\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{V\alpha\gamma}{V\gamma\beta} : \frac{V\alpha\delta}{V\delta\beta}. \quad (104)$$

Изъ этой формулы слѣдуетъ прежде всего, что выражение $(V\alpha\gamma/V\gamma\beta)$: $(V\alpha\delta/V\delta\beta)$ не зависитъ отъ тензоровъ бивекторовъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, а зависитъ только отъ относительного положенія ихъ осей. Вовторыхъ, она даетъ намъ выражение ангармонического отношенія透过 косыя координаты бивекторовъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, отнесенныхъ къ какимъ нибудь двумъ координатнымъ бивекторамъ σ и σ , оси которыхъ принадлежать щеткѣ.

Если оси трехъ бивекторовъ α , σ и σ принадлежать одной и той же щеткѣ, то, какъ мы видѣли въ концѣ § 80, всегда можно подыскать такихъ два комплексныхъ числа a и b , что $\alpha = a\sigma + b\sigma$. Числа a и b будутъ косыми комплексными координатами бивектора α ; мы можемъ считать ихъ также за однородныя координаты луча α , ибо числа ia и ib , где $i = \sqrt{-1}$, будутъ координатами бивектора $i\alpha = ia\sigma + ib\sigma$, имѣющаго общую ось съ α .

Пусть, теперь, однородныя координаты лучей β, γ, δ будутъ соответственно $a', b'; a'', b''; a''', b'''$, такъ что $\beta = a'\sigma + b'\sigma$, $\gamma = a''\sigma + b''\sigma$, $\delta = a'''\sigma + b'''\sigma$. Подставляя эти выражения въ предыдущую формулу, получаемъ:

$$g = (\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{ab'' - ba''}{a'b' - b'a'} : \frac{ab''' - ba'''}{a'b''' - b'a'''}. \quad (105)$$

Если за координатные бивекторы примемъ бивекторы α и β и если $\gamma = a\alpha + b\beta$ и $\delta = a'\alpha + b'\beta$, то

$$g = (\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{b}{a} : \frac{b'}{a'}. \quad (106)$$

Чослѣдняя формула даетъ намъ возможность доказать слѣдующія теоремы:

Теорема I. Если лучи $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ лежат на цилиндроиде то их ангармоническое отношение $(\alpha\beta\gamma\delta)$ есть число вещественное (моментъ $(\alpha\beta\gamma\delta)$ равенъ нулю).

Въ самомъ дѣлѣ, если лучи $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ лежать на цилиндроидѣ, то мы всегда можемъ предполагать параметры винтовъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ такими, что эти винты принадлежать двучленной группѣ [см. главу II], и тогда, принявъ винты α и β за основные винты, мы будемъ имѣть $\gamma = a\alpha + b\beta$, $\delta = a'\alpha + b'\beta$, гдѣ a, b, a', b' будутъ вещественными числами. Ангармоническое отношение $g = (b/a):(b'/a')$ будетъ, слѣдовательно, также числомъ вещественнымъ.

Теорема II. Если ангармоническое отношение четырехъ лучей $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ число вещественное, то лучи $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ лежатъ на одномъ цилиндроидѣ.

Изъ равенства $g = (b/a):(b'/a')$ имѣемъ $b' = (ba'):(ag)$ и

$$\delta = \frac{a'}{ag} (gaa + b\beta)$$

Такъ какъ g есть число вещественное, то винты $\alpha' = a\alpha$, $\beta' = b\beta$, $\gamma' = \alpha' + \beta'$ и $\delta' = g\alpha' + \beta'$ принадлежать двучленной группѣ и оси ихъ лежать на цилиндроидѣ. Но лучи $\alpha, \beta, \gamma, \delta = (\alpha'/ag)\delta'$ совпадаютъ съ осями $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$, и теорема такимъ образомъ доказана.

Такъ какъ условіе: „ g = вещественному числу“ равносильно условію: „ $Pg = 0$ “, то на основаніи формулы (103) предыдущія дѣлѣ тѣоремы мы можемъ формулировать такимъ образомъ:

Теорема III. Для того, чтобы четыре луча $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ лежали на одномъ цилиндроидѣ необходимо и достаточно, чтобы

$$ACctg(\alpha\gamma)_o - CBctg(\gamma\beta)_o = ADctg(\alpha\delta)_o - DBctg(\delta\beta)_o.$$

Мы видѣли, что когда намъ даны три луча α, β, γ и ангармоническое отношение $(\alpha\beta\gamma\delta)$, то лучъ δ вполнѣ опредѣляется. Равенство $\delta' = g\alpha' + \beta'$ показываетъ намъ, что всѣ лучи δ' (или δ), отвѣчающіе различнымъ значеніямъ

$$g = (\alpha\beta\gamma\delta) = \text{вещественному числу}$$

лежать на одномъ и томъ же цилиндроидѣ, который проходитъ черезъ лучи $\alpha(g=\infty), \beta(g=0)$ и $\gamma(g=1)$. Такимъ образомъ мы имѣемъ теорему:

Теорема IV. Черезъ три луча щетки, α, β, γ , всегда можно провести одинъ и только одинъ цилиндроидъ. Онъ служитъ геометрическимъ мѣстомъ лучей δ , для которыхъ ангармоническое отношение $(\alpha\beta\gamma\delta) =$ вещественному числу $[Pg = P(\alpha\beta\gamma\delta)] = 0$.

Представивъ бивекторъ $\delta' = g\alpha' + \beta'$ въ видѣ $\delta' = g_0(1 + \omega Pg)\alpha' + \beta'$, видимъ, что всѣ лучи δ (или δ'), для которыхъ Pg есть одна и та же величина лежать на цилиндроидѣ опредѣляемомъ винтами $(1 + \omega Pg)\alpha'$ и β' ; цилиндроидъ этотъ проходитъ черезъ лучи α и β . Итакъ, имѣемъ слѣдующую теорему:

Теорема V. Геометрическое мѣсто лучей δ , для которыхъ $Pg = P(\alpha\beta\gamma\delta) = \text{const.}$, есть цилиндроидъ, проходящий черезъ лучи α и β .

Обратная теорема также справедлива:

Таорема VI. Для всѣхъ лучей δ одного и того же цилиндроида, проходящаго черезъ лучи α и β , $Pg = P(\alpha\beta\gamma\delta)$, иѣ γ есть какой нибудь лучъ щетки, есть величина постоянная.

Дѣйствительно, такъ какъ лучи δ лежать на цилиндроидѣ, проходящемъ черезъ α и β , то мы можемъ предположить параметры винтовъ α и β таковыми, что числа a' и b' въ выражениі δ черезъ α и β , $\delta = a'\alpha + b'\beta$, будутъ вещественными и $Ra - Ib' = 0$. Тогда становится очевиднымъ, что

$$Pg = P(\alpha\beta\gamma\delta) = Pb - Pa$$

будетъ величиной постоянной для всѣхъ лучей δ .

Если мы проведемъ черезъ лучи α и β цилиндроидъ, для всѣхъ образующихъ δ , котораго $P(\alpha\beta\gamma\delta)$ есть одна и та же постоянная Pg , то, пользуясь этимъ цилиндроидомъ, мы можемъ дать для $I(\alpha\beta\gamma\delta) = Pg$ весьма простое выраженіе. Дѣйствительно, проведемъ черезъ лучъ δ и ось щетки плоскость, которая пересѣчеть построенный цилиндроидъ по нѣкоторому лучу δ . Если D , есть точка встрѣчи луча δ съ осью щетки, то

$$Pg = ACctg(\alpha\gamma)_o - CBctg(\gamma\beta)_o - [ADctg(\alpha\delta)_o - DBctg(\delta\beta)_o],$$

ибо $(\alpha\delta)_o = (\alpha\delta)_o$ и $(\delta\beta) = (\delta\beta)_o$. Вычитая Pg_i изъ Pg (103), послѣ нѣкоторыхъ преобразованій, получаемъ искомое выражение:

$$Pg = Pg_i + DD_i \frac{\operatorname{sn}(\alpha\beta)_o}{\operatorname{sn}(\alpha\delta)_o \operatorname{sn}(\delta\beta)_o}. \quad (107)$$

Если примемъ Pg и Pg_i за постоянныя, то это уравненіе, связывающее разстояніе DD_i , съ углами $(\alpha\delta)_o$ и $(\delta\beta)_o = (\alpha\beta)_o - (\alpha\delta)_o$, будетъ уравненіемъ цилиндроида, проходящаго черезъ лучи α и β .

Четыре луча $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ для которыхъ $(\alpha\beta\gamma\delta) = -1$ назовемъ гармоническими лучами; лучи γ и δ — гармонично-сопряженными съ лучами α и β . Такъ какъ -1 есть число вещественное, то изъ предыдущихъ теоремъ слѣдуетъ, что четыре гармоническихъ луча лежать на одномъ цилиндроидѣ и что проекціи ихъ на плоскость перпендикулярную къ оси будутъ гармоническими лучами пучка. Четыре луча $\alpha, \beta, \gamma = aa + b\beta$ и $\delta = aa - b\beta$ будутъ гармоническими лучами.

Этимъ опредѣленіемъ мы и закончимъ геометрію щетки, оставляя въ сторонѣ изученіе нѣкоторыхъ интересныхъ вопросовъ этой геометріи, какъ напр., изученіе инволюціи лучей щетки.

84. *Преобразованіе теоремъ проективной геометріи связки въ теоремы линейчатаго пространства. Нѣкоторыя определенія.* Переходимъ теперь къ разсмотрѣнію фигуръ и теоремъ, въ которыхъ щетка играетъ роль аналогичную плоскости связки. Разсмотримъ сначала наиболѣе простыя теоремы.

I. Два луча α и β связки опредѣляютъ плоскость (α, β) , черезъ нихъ проходящую; осью плоскости служитъ лучъ $V\alpha\beta$.

II. Две плоскости съ осями α и β пересѣкаются по прямой (имѣютъ общую прямую), по лучу $V\alpha\beta$.

I. Два луча α и β пространства опредѣляютъ щетку (α, β) , черезъ нихъ проходящую; осью щетки служитъ лучъ $V\alpha\beta$.

II. Две щетки съ осями α и β пересѣкаются по лучу $V\alpha\beta$ (имѣютъ общій лучъ), который служитъ линіей кратчайшаго разстоянія между осями α и β .

Эти сопоставленія вмѣстѣ съ теоремой § 82 показываютъ намъ, что изъ теоремъ геометріи связки, въ которыхъ идетъ

дѣло только о пересѣченіи плоскостей и о проведеніи плоскостей черезъ два луча, т. е. изъ теоремъ проективной геометріи, мы получимъ новые теоремы, если слово „плоскость“ замѣнимъ словомъ „щетка“.

Каждая такая теорема можетъ быть формулирована, какъ увидимъ въ слѣдующихъ примѣрахъ, въ другой формѣ, если мы будемъ щетку характеризовать ея осью и вмѣсто того, чтобы строить щетку, проходящую черезъ два луча, будемъ строить ось этой щетки—линию кратчайшаго разстоянія между лучами. Въ дальнѣйшемъ мы не будемъ всякой разъ указывать изъ какой теоремы получается наша и будемъ каждую изъ теоремъ формулировать только въ одномъ видѣ, предоставив читателю найти другую форму теоремы.

Такъ какъ для теоремъ проективной геометріи связки имѣтъ мѣсто принципъ двойственности, то понятно, что этотъ принципъ долженъ имѣть мѣсто и въ области тѣхъ теоремъ, въ которыхъ они преобразуются методомъ перенесенія, при чёмъ, очевидно, элементомъ дуалистическимъ съ лучемъ будетъ щетка. Если же мы будемъ формулировать теоремы, характеризуя щетку ея осью, то двѣ теоремы, соотвѣтствующія по принципу двойственности, становятся тождественными. Въ этомъ можно убѣдиться, рассматривая нижеданнныя примѣры.

Итакъ мы приходимъ къ такому результату:

Замѣнняя въ теоремахъ проективной геометріи связки слово „плоскость“ словомъ „щетка“, мы преобразуемъ ихъ въ теоремы линейчатаго пространства. Въ области этихъ теоремъ имѣтъ мѣсто принципъ двойственности, причемъ элементомъ дуалистичнымъ лучу будетъ щетка.

Трегранный уголъ состоящій изъ трехъ лучей и трехъ, проходящихъ черезъ нихъ, плоскостей есть простѣйшая фигура геометріи связки. Этой фигурѣ должна соотвѣтствовать фигура, состоящая изъ трехъ лучей α, β, γ пространства и трехъ, проходящихъ черезъ нихъ, щетокъ, осями которымъ служатъ оси $V\beta\gamma, V\gamma\alpha, V\alpha\beta$. Эту фигуру мы назовемъ раздвинутымъ треграннымъ угломъ. Лучъ α и щетку $V\beta\gamma$, лучъ β и щетку $V\gamma\alpha$, лучъ γ и щетку $V\alpha\beta$ будемъ называть противолежащими. Фигура вполнѣ опредѣляется тремя лучами α, β, γ и тремя осями $V\beta\gamma, V\gamma\alpha, V\alpha\beta$, совокупность которыхъ

образуетъ косой шестиугольникъ. Его стороны идуть въ такомъ порядке: лучъ α , ось $V\alpha\beta$, лучъ β , ось $V\beta\gamma$, лучъ γ , ось $V\gamma\alpha$; углы его все прямые. Такимъ образомъ:

трегранный уголъ методомъ перенесенія преобразуется въ раздвинутый трегранный уголъ, или, если будемъ характеризовать щетки ихъ осами, въ косой шестиугольникъ все углы котораго прямые..

Четыреребернику будетъ соотвѣтствовать фигура, состоящая изъ четырехъ лучей $\alpha.\beta.\gamma.\delta$, и шести, проходящихъ черезъ нихъ, щетокъ съ осами $V\alpha\beta$, $V\beta\gamma$, $V\gamma\delta$, $V\delta\alpha$, $V\alpha\gamma$, $V\beta\delta$, фигура, которую будемъ называть раздвинутымъ четыререберникомъ. Четырегранникъ преобразуется въ фигуру, которая состоитъ изъ четырехъ щетокъ съ осами $\alpha.\beta.\gamma.\delta$ и шести лучей $V\alpha\beta$, $V\beta\gamma$, $V\gamma\delta$, $V\delta\alpha$, $V\alpha\gamma$, $V\beta\delta$, по которымъ эти щетки пересѣкаются. Эту фигуру назовемъ раздвинутымъ четырегранникомъ. Если щетки будемъ характеризовать ихъ осами, то, очевидно, четыреребернику и четыреграннику будетъ соотвѣтствовать одна и также фигура изъ 10 прямыхъ, изъ которыхъ шесть служить линіями кратчайшихъ разстояній между остальными четырьмя.

85. *Обобщеніе теоремъ Desargues'a.* Чтобы пояснить общія разсужденія предъидущаго параграфа, остановимся подробнѣе на теоремахъ, которые получаются методомъ проектированія изъ теоремъ Desargues'a. Въ лѣвой колонкѣ мы приводимъ двѣ теоремы, соотвѣтствующія одна другой по принципу двойственности, а въ правой, теоремы, въ которыхъ они преобразуются методомъ перенесенія.

I. Если два, отнесенныхъ одинъ къ другому, трегранныхъ угла расположены такимъ образомъ, что соответствующія имъ грани пересѣкаются по прямымъ, которые все лежатъ въ одной плоскости, то отвѣтствующія ребра, все проходящія черезъ со-

I. Если два, отнесенныхъ одинъ къ другому, раздвинутыхъ трегранныхъ угла расположены такимъ образомъ, что соответствующія имъ щетки пересѣкаются по прямымъ, которые все лежатъ на одной щетке, то щетки, проходящія черезъ соотвѣтствующія ребра, все проходятъ черезъ одну и ту же прямую.

II. Если два, отнесенные к одному к другому, трехгранныхъ угла связки расположены такимъ образомъ, что плоскости, проходящія черезъ соответствующія ребра вспѣ проходятъ черезъ одну прямую, то линіи пересѣченія соответствующихъ граней вспѣ лежатъ въ одной плоскости.

II. Если два, отнесенныхъ к одному к другому, раздвинутыхъ трехгранныхъ угла расположены такимъ образомъ, что щетки, проходящія чрезъ соответствующія ребра вспѣ проходятъ черезъ одну прямую, то линіи пересѣченія соответствующихъ щетокъ вспѣ лежатъ на одной щеткѣ.

Ребра и оси щетокъ первого трехгранного угла образуютъ шестиугольникъ съ прямыми углами $\alpha, V\alpha\beta, V\beta\gamma, V\gamma\alpha$, а ребра и оси щетокъ втораго—шестиугольникъ $\alpha', V\alpha'\beta', V\beta'\gamma', V\gamma'\alpha'$. Оси щетокъ, проходящихъ чрезъ соответствующія ребра, суть линіи кратчайшихъ разстояній между α и α' , β и β' , γ и γ' , луци же, по которымъ пересѣкаются соответствующія щетки—лини кратчайшихъ разстояній между осами $V\alpha\beta$ и $V\alpha'\beta'$, $V\beta\gamma$ и $V\beta'\gamma'$, $V\gamma\alpha$ и $V\gamma'\alpha'$, а потому теорема II можетъ быть формулирована слѣдующимъ образомъ:

Если мы имѣемъ два косыхъ шестиугольника $\alpha, V\alpha\beta, \beta, V\beta\gamma, \gamma, V\gamma\alpha$ и $\alpha', V\alpha'\beta', \beta', V\beta'\gamma', \gamma', V\gamma'\alpha'$, которые расположены такимъ образомъ, что линіи кратчайшихъ разстояній между соответствующими сторонами α и α' , β и β' , γ и γ' принадлежатъ одной щеткѣ, то и линіи кратчайшихъ разстояній между осами $V\alpha\beta$ и $V\alpha'\beta'$, $V\beta\gamma$ и $V\beta'\gamma'$, $V\gamma\alpha$ и $V\gamma'\alpha'$ также принадлежать одной щеткѣ.

Подобнымъ же образомъ можетъ быть формулирована теорема I, и мы видимъ на этихъ примѣрахъ, что двѣ теоремы, отвѣчающія одна другой по принципу двойственности, становятся тождественными, если мы будемъ щетку характеризовать ея осью. Чтобы доказать теоремы I и II достаточно доказать теорему II въ томъ видѣ, какъ только что мы ее формулировали.

По предположенію существуетъ прямая, которая пересѣкаеть подъ прямымъ угломъ линіи кратчайшихъ разстояній между α и α' , β и β' , γ и γ' ; означимъ чрезъ δ бивекторъ, имѣющій эту прямую своюю осью. Тогда, такъ какъ оси α, α' и δ принадлежать одной и той же щеткѣ, существуетъ такихъ два комплексныхъ числа a и d , что $\alpha' = a\alpha + d\delta$; подобнымъ же образомъ $\beta' = a'\beta + d'\delta$ и $\gamma' = a''\gamma + d''\delta$. Замѣчая, что β'

и $\beta'(d/d')$, γ' и $\gamma'(d/d'')$ опредѣляютъ соотвѣтственно одинъ и тѣ же лучи, мы можемъ за β' и γ' принять бивекторы $\beta'(d/d')$ и $\gamma'(d/d'')$. Такъ что будемъ имѣть $a' = a\alpha + d\delta$, $\beta' = b\beta + d\delta$, $\gamma' = c\gamma + d\delta$. Линіями кратчайшаго разстоянія между соотвѣтствующими осями $V\alpha\beta$ и $V\alpha'\beta'$ и т. д. будутъ служить лучи $V(V\alpha\beta V\alpha'\beta')$, $V(V\beta\gamma V\beta'\gamma')$, $V(V\gamma\alpha V\gamma'\alpha')$. Линіями кратчайшаго разстоянія между этими послѣдними служатъ оси $V(V\alpha\beta V\alpha'\beta')V_t V\beta\gamma V\beta'\gamma')$ и т. д.; эти то оси на основаніи теоремы и должны совпадать. Чтобы это доказать мы вычисляемъ ихъ, пользуясь выраженіями для a', β', γ' . Понеже всего мы находимъ $V\alpha'\beta' = abV\alpha\beta + adV\alpha\delta + dbV\delta\beta$, $V\beta'\gamma' = bcV\beta\gamma + bdV\beta\delta + dcV\delta\gamma$ и $V\gamma'\alpha' = caV\gamma\alpha + cdV\gamma\delta + daV\delta\alpha$. Даѣте, пользуясь формулой (73) § 77, находимъ

$$\begin{aligned} Q_1 &= V.V\alpha\beta.V\alpha'\beta' = dS\alpha\beta\delta(-a\alpha + b\beta), \\ Q_2 &= V.V\beta\gamma.V\beta'\gamma' = dS\beta\gamma\delta(-b\beta + c\gamma'), \\ Q_3 &= V.V\gamma\alpha.V\gamma'\alpha' = dS\gamma\alpha\delta(-c\gamma + a\alpha), \end{aligned}$$

и наконецъ

$$\begin{aligned} VQ_2Q_3 &= d^2S\beta\gamma\delta.S\gamma\alpha\delta. \sigma, \\ VQ_3Q_1 &= d^2S\gamma\alpha\delta.S\alpha\beta\delta. \sigma, \\ VQ_1Q_2 &= d^2S\alpha\beta\delta.S\beta\gamma\delta. \sigma, \end{aligned}$$

гдѣ $\sigma = bcV\beta\gamma + caV\gamma\alpha + abV\alpha\beta$, откуда и слѣдуетъ, что три оси VQ_2Q_3 , VQ_3Q_1 , VQ_1Q_2 совпадаютъ, ибо бивекторы VQ_2Q_3 , VQ_3Q_1 , VQ_1Q_2 получаются отъ умноженія одного и того же бивектора σ на различныя комплексныя числа.

Отмѣтили одно слѣдствіе, вытекающее изъ предыдущихъ теоремъ и аналогичное извѣстному свойству двухъ, отнесеныхъ одинъ къ другому, четыререберниковъ.

Если мы имѣемъ два раздвинутыхъ четыререберника съ ребрами $a.\beta.\gamma.\delta$ и $a'.\beta'.\gamma'.\delta'$, которые расположены такимъ образомъ, что пять соотвѣтствующихъ щетокъ $(\alpha.\beta)$ и $(\alpha'.\beta')$, $(\beta\gamma)$ и $(\beta'\gamma')$, $(\gamma\delta)$ и $(\gamma'\delta')$, $(\delta\alpha)$ и $(\delta'\alpha')$, $(\alpha\gamma)$ и $(\alpha'\gamma')$ пересѣкаются по лучамъ, принадлежащимъ къ одной и той же щеткѣ, то къ той же щеткѣ принадлежитъ и лучъ пересеченія шестой пары соотвѣтствующихъ щетокъ (β,δ) и (β',δ') .

Предоставляем читателю самому найти какой видъ примиетъ эта теорема, если щетку будемъ характеризовать ея осью.

86. Построение по тремъ даннымъ лучамъ щетки четырехъ гармоничнаго съ ними.

Теорема. Если черезъ два луча α и β по которымъ пересыкаются двѣ пары противоположныхъ щетокъ (σ_1, σ_2) и (σ_3, σ_4) , (σ_2, σ_3) и (σ_1, σ_4) раздвинутаго четыререберника съ ребрами $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ проведемъ щетку (α, β) , то два луча γ и δ пересечения этой посльней съ двумя остальными щетками четыререберника (σ_1, σ_3) и (σ_2, σ_4) будутъ гармонично-сопряженными лучами съ α и β .

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ суть оси щетокъ (σ_1, σ_2) , (σ_2, σ_3) , (σ_3, σ_4) , (σ_4, σ_1) , (σ_1, σ_3) и (σ_2, σ_4) четыререберника.

Построивъ сначала прямые $\alpha = VQ_1Q_3$ и $\beta = VQ_2Q_4$ пересечения щетокъ (σ_1, σ_2) и (σ_3, σ_4) , (σ_2, σ_3) и (σ_4, σ_1) и означивъ черезъ ε ось щетки (α, β) , строимъ затѣмъ лучи $\gamma = V\varepsilon Q_5$ и $\delta = V\varepsilon Q_6$, по которымъ щетка (α, β) пересыкается со щетками (σ_1, σ_3) и (σ_2, σ_4) . Пользуясь формулой (71) и условіями $S\varepsilon\alpha = S\varepsilon\beta = 0$, получаемъ:

$$V\alpha\gamma = -\varepsilon S\alpha Q_5, V\gamma\beta = \varepsilon S\beta Q_5,$$

$$V\alpha\delta = -\varepsilon S\alpha Q_6, V\delta\beta = \varepsilon V\beta Q_6$$

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{V\alpha\gamma}{V\gamma\beta} \cdot \frac{V\alpha\delta}{V\delta\beta} = \frac{S\alpha Q_5}{S\beta Q_5} \cdot \frac{S\alpha Q_6}{S\beta Q_6}.$$

Но $\alpha = VQ_1Q_3 = VV\sigma_1\sigma_2 \cdot V\sigma_3\sigma_4 = \sigma_4 S\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \sigma_3 S\sigma_1\sigma_2\sigma_4$, слѣдовательно $S\alpha Q_5 = S\alpha V\sigma_1\sigma_3 = S\sigma_4\sigma_1\sigma_3 S\sigma_1\sigma_2\sigma_3$.

Подобнымъ же образомъ $S\beta Q_5 = -S\sigma_1\sigma_2\sigma_3 S\sigma_3\sigma_4\sigma_1$, $S\alpha Q_6 = -S\sigma_3\sigma_2\sigma_4 S\sigma_1\sigma_2\sigma_4$, $S\beta Q_6 = S\sigma_1\sigma_2\sigma_4 S\sigma_3\sigma_4\sigma_1$,

и

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = -1,$$

что и требовалось доказать.

Предыдущая теорема дает нам возможность по тремъ даннымъ лучамъ α, β, γ щетки построить лучъ δ гармонично-сопряженный съ γ относительно α и β . Нужно только построить четыререберникъ $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ такъ, чтобы двѣ противоположныя щетки (σ_1, σ_2) и (σ_3, σ_4) проходили бы черезъ лучъ α , двѣ противулежатія щетки (σ_2, σ_3) и (σ_1, σ_4) черезъ лучъ β , и наконецъ щетка (σ_1, σ_3) черезъ γ ; тогда пересеченіе щетки, къ которой привадлежатъ лучи α, β, γ со щеткой (σ_2, σ_4) и даетъ намъ искомый лучъ δ .

Лучъ δ гармонично-сопряженный съ α и β относительно γ лежитъ на цилиндроидѣ, опредѣляемомъ лучами α, β, γ . Такимъ образомъ предыдущее построеніе даетъ намъ средство по тремъ образующимъ цилиндра построить четвертую. Подобнымъ же образомъ построимъ пятую образующую ϵ гармонично-сопряженную съ β относительно γ и δ . Затѣмъ построимъ шестую, седьмую и вообще какое угодно число образующихъ цилиндра.

Итакъ, умѣя строить прямую линію, прямой уголъ и линію кратчайшаго разстоянія между двумя пряммыми, можемъ построить цилиндроидъ, который проходитъ черезъ три произвольно выбранныхъ луча щетки.

87. *Проективные и перспективные щетки.* Двѣ щетки будемъ называть проективными, если онѣ отнесены одна къ другой такимъ образомъ, что ангармоническое отношеніе четырехъ, произвольно взятыхъ, элементовъ одной равняется ангармоническому отношенію соответствующихъ четырехъ элементовъ другой.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ.

I. Если въ двѣхъ щеткахъ $\rho = a\alpha + b\beta$ и $\rho' = a'\alpha' + b'\beta'$ будемъ считать соответствующими лучи ρ и ρ' , опредѣляемые одной парой чиселъ a и b , то щетки ρ и ρ' будутъ проективны, потому что ангармоническое отношеніе какихъ либо четырехъ лучей

$$\rho_1 = a_1\alpha + b_1\beta, \quad \rho_2 = a_2\alpha + b_2\beta, \quad \rho_3 = a_3\alpha + b_3\beta, \quad \rho_4 = a_4\alpha + b_4\beta$$

первой щетки,

$$(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) = \frac{a_1b_2 - b_1a_2}{a_2b_1 - b_2a_1} : \frac{a_3b_4 - b_3a_4}{a_4b_3 - b_4a_3} \quad (108)$$

будеть равняться ангармоническому отношению соответствующихъ лучей

$$Q_1' = a_1\alpha' + b_1\beta', Q_2' = a_2\alpha' + b_2\beta', Q_3' = a_3\alpha' + b_3\beta', Q_4' = a_4\alpha' + b_4\beta'$$

второй (см. § 83).

II. Такъ какъ по даннымъ тремъ лучамъ щетки, Q_1, Q_2, Q_3 и ангармоническому отношению ихъ къ четвертому лучу Q_4 , (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4), лучъ Q_4 можетъ быть построенъ (см. § 83), то три пары соответствующихъ элементовъ вполнѣ опредѣляютъ проективную зависимость двухъ щетокъ.

III. Две щетки, проективныя третьей, проективны между собой.

IV. Параллельнымъ лучамъ одной изъ проективныхъ щетокъ соответствуютъ параллельные лучи другой.

V. Лучамъ первой щетки, которые служать образующими какого либо цилиндроида, во второй щеткѣ будуть соответствовать лучи, которые также лежать на одномъ и томъ же цилиндроидѣ, такъ что каждому цилиндроиду первой щетки будетъ соответствовать цилиндроидъ второй щетки. Четырьемъ гармоническимъ лучамъ первой щетки будутъ соответствовать четыре гармоническихъ луча второй.

Теорема I. *Ангармоническое отношение четырехъ лучей щетки равняется ангармоническому отношению четырехъ линий кратчайшаго разстоянія между этими лучами и произвольно взятыми лучемъ пространства.*

Въ самомъ дѣлѣ ангармоническая отношенія лучей

$$Q_1 = a_1\alpha + b_1\beta, Q_2 = a_2\alpha + b_2\beta, Q_3 = a_3\alpha + b_3\beta, Q_4 = a_4\alpha + b_4\beta$$

и линій кратчайшихъ разстояній между ними и осью ϵ , линій, которая служатъ осами для бивекторовъ $VQ_1\epsilon = a_1\alpha' + b_1\beta'$, $VQ_2\epsilon = a_2\alpha' + b_2\beta'$, $VQ_3\epsilon = a_3\alpha' + b_3\beta'$, $VQ_4\epsilon = a_4\alpha' + b_4\beta'$, гдѣ $\alpha' = V\alpha\epsilon$ и $\beta' = V\beta\epsilon$, опредѣляются одной и той же формулой (108).

Отсюда слѣдуетъ:

I. Строя линіи кратчайшихъ разстояній между осью ϵ и лучами щетки Q , мы получимъ щетку Q' съ осью ϵ , которая будетъ проективна щеткѣ Q , если соответствующими

лучами щетокъ σ и σ' будемъ считать лучи, пересѣкающіеся подъ прямымъ угломъ. Двѣ проективныя щетки, отнесенные одна къ другой такимъ образомъ, что соответствующіе лучи ихъ пересѣкаются подъ прямымъ угломъ назовемъ разноименно - перспективными.

II. Двѣ проективныя щетки будутъ разноименно - перспективны, если три пары соответствующихъ лучей будутъ пересѣкаться подъ прямыми углами. (См. слѣдствіе II основнаго опредѣленія).

Двѣ щетки σ и σ' , изъ которыхъ каждая разноименно-перспективна съ одной и той же щеткой σ , будемъ называть одноименно-перспективными. Соответствующіе лучи щетокъ σ и σ' пересѣкаютъ одинъ и тотъ же лучъ щетки σ , который будетъ линіей кратчайшаго разстоянія между ними. Итакъ, линіи кратчайшаго разстоянія между соответствующими лучами двухъ одноименно-перспективныхъ щетокъ образуютъ щетку.

Двѣ однопримѣнно - перспективныхъ щетки имѣютъ одинъ соединенный элементъ - лучъ, по которому они пересѣкаются.

Теорема II. Если двѣ проективныя щетки σ и σ' имѣютъ соединенный общий лучъ, то они одноименно-перспективны.

Въ самуъ дѣлѣ, пусть α , лучъ пересѣченія щетокъ σ и σ' , есть соединенный лучъ и пусть лучамъ β и γ щетки σ соответствуютъ лучи β' и γ' щетки σ' . Построимъ лучи $V\beta\beta'$ и $V\gamma\gamma'$ и проведемъ черезъ нихъ щетку σ . Означая черезъ ε лучъ щетки σ , пересѣкающей α подъ прямымъ угломъ, отнесемъ щетки σ и σ' въ σ такъ, чтобы лучамъ $\varepsilon, V\beta\beta', V\gamma\gamma'$ щетки σ соответствовали въ щеткѣ σ лучи α, β, γ , а въ щеткѣ σ' - лучи α', β', γ' . Такъ какъ лучи α, β, γ и α', β', γ' пересѣкаютъ подъ прямымъ угломъ соответственно лучи $\varepsilon, V\beta\beta', V\gamma\gamma'$, то щетка σ будетъ разноименно-перспективна какъ со щеткой σ , такъ и со щеткой σ' (слѣдствіе II, теорема I), а следовательно щетки σ и σ' будутъ одноименно-перспективны.

Изъ этой теоремы и опредѣленія одноименно-перспективныхъ щетокъ слѣдуетъ:

Если двѣ проективныя щетки имѣютъ соединенный элементъ, то линіи кратчайшихъ разстояній между соответствующими лучами образуютъ щетку.

88. *Конгруэнція, аналогичная конусу втораго порядка.* Когда двѣ проективныя щетки σ и σ' соединеннаго элемента не имѣютъ, то линіи кратчайшаго разстоянія между соотвѣтствующими лучами образуютъ форму болѣе сложную нежели щетка. Эта совокупность представляетъ конгруэнцію, потому что каждому лучу α щетки σ соотвѣтствуетъ одинъ вполнѣ опредѣленный луч α' щетки σ' и вполнѣ опредѣленная линія кратчайшаго разстоянія между α и α' ; положеніе же луча α щетки σ зависитъ отъ двухъ параметровъ. Конгруэнція эта обладаетъ интересными свойствами. Перечислимъ нѣкоторые изъ нихъ, причемъ не будеть останавливаться на подробнѣихъ изученіи и доказательствѣ.

Всякая щетка пересѣкается съ конгруэнціей, вообще говоря, по двумъ лучамъ.

Всѣ лучи конгруэнціи параллельны образующимъ конуса втораго порядка.

Лучи безконечно близкіе къ какому нибудь лучу σ конгруэнціи образуютъ щетку, которую можно назвать щеткой касательной къ конгруэнціи вдоль луча σ .

Совокупность осей касательныхъ щетокъ образуетъ конгруэнцію такого же типа.

Далѣе, мы можемъ провести полную аналогію между свойствами конуса втораго порядка и свойствами конгруэнціи. При этомъ образующимъ конуса будутъ соотвѣтствовать лучи конгруэнціи, плоскостямъ, касательнымъ къ конусу,—щетки касательныя къ конгруэнціи. Укажемъ нѣкоторыя изъ этихъ свойствъ.

Пять лучей вполнѣ опредѣляютъ конгруэнцію. По пяти лучамъ конгруэнція можетъ быть построена аналогично тому, какъ по пяти образующимъ строится конусъ втораго порядка.

Теоремъ Паскаля будетъ соотвѣтствовать слѣдующая:

Если мы возьмемъ шесть лучей конгруэнціи въ какомъ нибудь опредѣленномъ порядкѣ, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$, затѣмъ построимъ линіи кратчайшихъ разстояній: τ_1 между σ_1 и σ_2 , τ_2 между σ_2 и σ_3 , ... и τ_6 между σ_6 и σ_1 , то линіи кратчайшихъ разстояній между противолежащими лучами: τ_1 и τ_4 , τ_2 и τ_5 , τ_3 и τ_6 будутъ пересѣкать подъ прямымъ угломъ одну и ту же прямую.

Изъ этой теоремы вытекаетъ рядъ интересныхъ слѣдствій. Не останавливаясь на тѣхъ, которыхъ вполнѣ аналогичны со слѣдствіями изъ теоремы Паскаля, мы отмѣтимъ здѣсь слѣдующее.

Представимъ себѣ какую нибудь линію (s) въ пространствѣ. Лучи конгруэнціи, пересѣкающіе линію, образуютъ, очевидно, нѣкоторую линейчатую поверхность (S). Такъ какъ въ предыдущей теоремѣ лучи $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$ могутъ быть какими угодно лучами конгруэнціи, то мы можемъ принять за нихъ какія либо шесть образующихъ поверхности (S).

Итакъ, если мы возьмемъ какія либо шесть образующихъ $\sigma_1, \dots, \sigma_6$ поверхности (S), то эти образующія обладаютъ свойствомъ, которое выражается предыдущей теоремой.

Вслѣдствіе неопредѣленности кривой (s) поверхностей (S), обладающихъ этимъ свойствомъ существуетъ безчисленное множество. Можно показать, что къ числу ихъ принадлежатъ нѣкоторая алгебраическая поверхность шестаго порядка (такая поверхность получится, если будемъ строить линіи кратчайшихъ разстояній между соответствующими лучами двухъ проективныхъ цилиндроидовъ) а также поверхности втораго порядка причемъ лучи $\sigma_1, \dots, \sigma_6$ должны быть образующими одного и того же рода.

Роль аналогичную циклическимъ плоскостямъ конуса играютъ двѣ щетки, которые мы можемъ назвать циклическими щетками. Отмѣтимъ здѣсь слѣдующія свойства циклическихъ щетокъ.

I. По тремъ даннымъ лучамъ конгруэнціи, не принадлежащимъ одной щеткѣ, и данной циклической щеткѣ можно построить конгруэнцію.

II. Если проведемъ какую нибудь щетку и опредѣлимъ лучи σ' и σ'' ; σ' и σ'' , по которымъ она пересѣкается съ двумя циклическими щетками и съ конгруэнціей соответственно, то комплексный уголъ между σ' и σ' будетъ равняться комплексному углу между σ'' и σ'' .

III. Проведемъ черезъ какіе нибудь три луча конгруэнціи $\sigma', \sigma'', \sigma'''$ двѣ щетки (σ', σ'') и (σ'', σ''') и опредѣлимъ пересѣченія σ' и σ'' ихъ съ одной изъ циклическихъ щетокъ. Если мы, не измѣняя лучей σ' и σ'' , будемъ двигать лучъ σ''' такъ, чтобы онъ всегда принадлежалъ конгруэнціи, то лучи

ρ' и ρ'' такъ будуть перемѣщаться по циклической линии, что комплексный уголъ между ρ' и ρ'' будетъ оставаться постояннымъ.

Эти свойства являются результатомъ приложения не только теоремы § 84, но и теоремы § 82, ибо въ нихъ идеть дѣло о комплексныхъ углахъ. Мы привели ихъ здѣсь для того, чтобы показать, что свойствами конгруэнціи мы можемъ воспользоваться для доказательства закона ассоціативности умноженія верзоровъ-бикватеріоновъ, подобно тому, какъ Hamilton (Elements, §§ 269 и 270) пользуется аналогичными свойствами конуса втораго порядка для доказательства закона ассоціативности умноженія верзоровъ-кватеріоновъ.

Теоремами этого параграфа мы закончимъ приложенія общей теоремы § 84. Мы думаемъ, что достаточно выяснили характеръ тѣхъ теоремъ, въ которыхъ преобразуются методомъ перенесенія теоремы проективной геометріи связки, а потому мы не будемъ входить въ дальнѣйшія подробности относительно того преобразованія линейчатаго пространства, къ которому приводятъ пась предыдущія изслѣдованія и которое соотвѣтствуетъ линейному преобразованію однородныхъ комплексныхъ координатъ прямой; къ этому преобразованію мы предполагаемъ еще вернуться впослѣдствіи.

89. Прямолинейное, плоское и сферическое многообразія бивекторовъ. Рассмотримъ теперь въ какія многообразія бивекторовъ преобразуются прямая и плоскость, не проходящія черезъ начало координатъ, и сфера съ центромъ въ началѣ координатъ

Прямая линія опредѣляется уравненіями:

$$x = a + a't, \quad y = b + b't, \quad z = c + c't, \quad (109)$$

въ которыхъ a, b, c суть координаты какой либодь точки прямой, a', b', c' проекціи вектора, параллельного прямой, и t перемѣнныи параметръ. Если обозначимъ черезъ α векторъ $ai + bj + ck$, черезъ β — векторъ $a'i + b'j + c'k$ и черезъ ϱ — векторъ $xi + yj + zk$, въ концѣ котораго находится перемѣнная точка прямой, то всѣ три уравненія мы можемъ соединить въ одно:

$$\varrho = \alpha + \beta t. \quad (110)$$

Если числа $a, b, c, a', b', c', t, x, y, z$ слѣдаются комплексными, то уравненія (109) или эквивалентное имъ ур. (110) опредѣлять вѣкоторое—прямолинейное—многообразіе; мы получимъ всѣ его бивекторы, если комплексному числу t будеть давать всѣвозможныя значенія. Когда $P\alpha$ и $P\beta$ копечны и оси α и β не параллельны, то винты, опредѣляемые бивекторами многообразія образуютъ по нашей терминологіи трехчленную двуосную группу, а потому доказательство вѣкоторыхъ изъ свойствъ многообразія, которыхъ мы сейчасъ перечислимъ, мы дадимъ въ слѣдующей главѣ, посвященной теории группъ.

I. Оси бивекторовъ ϱ образуютъ щетку (σ), при чемъ каждый лучъ щетки служить осью одного и только одного бивектора. Исключеніе составляеть только ось β , служащая осью безчисленнаго множества бивекторовъ, у которыхъ главные векторы бесконечно велики, а параметры имѣютъ всѣвозможныя значенія.

II. Бивекторы, оси которыхъ параллельны оси β , имѣютъ бесконечно большой параметръ и бесконечно большой главный векторъ.

III. Оси бивекторовъ съ однимъ и тѣмъ же параметромъ образуютъ гиперболической параболоидъ, у которого произволиша одного рода принадлежать щетка (σ), а другаго — щетка съ осью β . Всѣ параболоиды проходятъ черезъ ось β и ось щетки (σ). Для вѣкотораго параметра параболоидъ распадается на двѣ плоскости: одна перпендикулярна оси β , а другая проходить черезъ эту ось.

IV. Если за точку приведенія для каждого бивектора возьмемъ точку пересѣченія его оси съ осью щетки, то концы главныхъ векторовъ будутъ лежать въ плоскости параллельной осимъ β и щетки (σ).

Плоскость опредѣляется или тремя уравненіями:

$$\begin{aligned}x &= a + a'u + a''v \\y &= b + b'u + b''v \\z &= c + c'u + c''v,\end{aligned}\tag{111}$$

въ которыхъ a, b, c суть координаты какой нибудь точки плоскости, $a', b', c'; a'', b'', c''$ проекціи двухъ векторовъ параллель-

ныхъ плоскости, а и и v пространственные параметры, уравнениями, которые мы можемъ соединить въ одно

$$\varrho = a + \beta u + \gamma v, \quad (112)$$

положивъ $\varrho = xi + yj + zk$, $a = ai + bj + ck$, $\beta = a'i + b'j + c'k$, $y = a''i + b''j + c''k$, или же однимъ уравнениемъ вида:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (113)$$

Когда $a, b, c, \dots, A, B, C, D, x, y, z$ становятся комплексными, ур. (112) или эквивалентны ему ур. (111) опредѣлятъ пѣкоторое многообразіе бивекторовъ—плоское многообразіе. Изъ ур. (113) прямо видно, что многообразіе есть совокупность бивекторовъ, которые проектируются на ось (A, B, C) однимъ и тѣмъ же бивекторомъ съ тензоромъ:

$$\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

То же видно и изъ ур. (112), пбо умноживъ его на $V\beta y$, получимъ ур.:

$$S\varrho V\beta y = Sa\beta y,$$

которое показываетъ, что проекціи всѣхъ бивекторовъ ϱ на ось $V\beta y$ одинаковы. Припомнивъ свойства проекціи бивектора на ось [см. § 63] легко видѣть, что проекціи главныхъ векторовъ бивекторовъ многообразія на направление $V\beta y$ будутъ одинаковы и что оси бивекторовъ одного и того же параметра будутъ лучами конгруэнціи двухъ линейныхъ комплексовъ.

Сфера радиуса R съ центромъ въ началѣ координатъ имѣетъ своимъ уравненiemъ

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Если R сдѣлается комплекснымъ, то координаты всякаго бивектора, тензоръ которого есть $R = R_0 + \omega R_1$, будутъ удовлетворять этому уравненію. Такимъ образомъ, методомъ перенесенія сфера преобразуются въ многообразіе бивекторовъ, у которыхъ тензоры одинаковы, а осами могутъ служить всѣ-

возможная прямая пространства. Въ частномъ случаѣ, когда $R = 1$, бивекторы многообразія обратятся въ винты параметра нуль. Но винтъ параметра нуль вполнѣ опредѣляется его осью и ея направлениемъ. Поэтому, если прямую, которой мы приписываемъ определенное направление, назовемъ осью, а совокупность всѣхъ осей—осевымъ пространствомъ, то будемъ имѣть такую теорему:

Методомъ перенесенія сферы преобразуется въ осевое пространство; геометрія сферы въ геометрію осеваго пространства.

Замѣтимъ, что между линейчатымъ пространствомъ, въ которое, какъ было показано, преобразуется связка, когда мы будемъ числа x,y,z считать комплексными однородными координатами луча, и осевымъ пространствомъ, въ которое преобразуется сфера радиуса единица, существуетъ нѣкоторое различеніе. Въ линейчатомъ пространствѣ каждая прямая служить *однимъ* отдельнымъ элементомъ пространства. Въ осевомъ же пространствѣ каждая прямая *несетъ два элемента*, отвѣчающіе двумъ направлениемъ, которыхъ можно приписать этой прямой.

Изъ нашихъ изслѣдований въ § 82 легко будетъ видѣть, что большому кругу сферы будетъ отвѣтъ оси принадлежащія одной и той же щеткѣ; длины дуги, соединяющей двѣ точки сферы,—комплексный уголъ между осями, сферическому углу—комплексный уголъ между осами щетокъ. Сферическому треугольнику будетъ соотвѣтствовать совокупность трехъ осей и трехъ, проходящихъ черезъ нихъ, щетокъ, или, если будемъ щетки характеризовать ихъ осами, совокупность шести осей, которыхъ, пересѣкаясь между собой, образуютъ шестиугольникъ съ прямыми углами. Между частями такого шестиугольника должны существовать соотношенія аналогичные формуламъ сферической тригонометріи.

90. *Преобразованіе геометріи сферического треугольника въ геометрію косаго шестиугольника съ прямыми углами.* Въ самомъ дѣлѣ означимъ черезъ $a = a_0 + \omega a_1$, $b = b_0 + \omega b_1$, $c = c_0 + \omega c_1$, комплексные углы между тремя осями α, β и γ и черезъ $A = A_0 + \omega A_1$, $B = B_0 + \omega B_1$, $C = C_0 + \omega C_1$, комплексные углы между осями $V_{\alpha}a$ и $V_{\alpha}\beta$, $V_{\alpha}\beta$ и $V_{\beta}\gamma$, $V_{\beta}\gamma$ и $V_{\gamma}a$. Углы a, b, c будутъ соотвѣтствовать сторонамъ сферического

треугольника, а углы A, B, C —углы треугольника, или, точище, сторонамъ поларного треугольника. Такъ какъ $T\alpha = T\beta = T\gamma = 1$, то

$$S\beta\gamma = -csa, \quad S\gamma\beta = -csb, \quad Sa\beta = -csc, \\ TV\beta\gamma = sna, \quad TV\gamma\alpha = snb, \quad TV\alpha\beta = snc,$$

и потому формула (74): $SV\gamma\alpha V\alpha\beta = -S\gamma\alpha Sa\beta + \alpha^2 S\beta\gamma$ приметь видъ

$$csa = csb csc - snb snc csA.$$

Изъ этой формулы аналогичной основной формулѣ сферической тригонометріи, понятно, могутъ быть выведены и другія формулы аналогичныя формуламъ тригонометріи.

Развернувъ ее, имѣемъ

$$csa_0 = csb_0 csc_0 - snb_0 snc_0 csA_0, \\ b_1 sna_0 = b_1 (snb_0 csc_0 + csb_0 snc_0 csA_0) \\ + c_1 (csb_0 snc_0 + snb_0 csc_0 csA_0) \\ - A_1 snb_0 snc_0 csA_0.$$

Выведемъ еще одну формулу, которая намъ сейчасъ понадобится. Означая комплексные углы между осями α, β, γ , и осями противолежащихъ щетокъ черезъ l, m, n изъ равенствъ

$$Sa\beta\gamma = SV\alpha\beta\gamma = SV\gamma\alpha\beta = SV\beta\gamma\alpha$$

получаемъ

$$snc.cs n = snb.cs m = sna.cs l. \quad (114)$$

Такъ какъ сферическому углу соответствуетъ комплексный уголъ между осями щетокъ, то взаимно перпендикулярныи дугамъ будутъ соответствовать взаимно перпендикулярныи щетки, оси которыхъ пересѣкаются подъ прямымъ угломъ. Это замѣчаніе позволяетъ намъ найти теорему, соответствующую элементарной теоремѣ сферической тригонометріи: высоты треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ. Этой теоремѣ должна соответствовать такая: щетки, прохо-

дящія черезъ оси α, β, γ и перпендикулярныя къ противоположнымъ щеткамъ, будуть имѣть общій лучъ.

Оси $\alpha, \beta, \gamma, V\beta\gamma, V\gamma\alpha, V\alpha\beta$ образуютъ щестиугольникъ съ прямыми углами. Оси щетокъ, которыхъ перпендикулярны къ щеткамъ $V\beta\gamma, V\gamma\alpha, V\alpha\beta$ и проходятъ черезъ противоположные этимъ щеткамъ лучи α, β, γ суть линіи кратчайшихъ разстояній между противоположными сторонами этого шестиугольника, а потому предъидущая теорема можетъ быть формулирована еще такимъ образомъ: линіи кратчайшихъ разстояній между противолежащими сторонами шестиугольника съ прямыми углами пересѣкаютъ одну и ту же прямую подъ прямымъ угломъ. Эту теорему мы можемъ доказать слѣдующимъ образомъ. Формула (71) даетъ намъ три равенства:

$$\begin{aligned} V\alpha V\beta\gamma &= \gamma S_{\alpha\beta} - \beta S_{\gamma\alpha}, \\ V\beta V\gamma\alpha &= \alpha S_{\beta\gamma} - \gamma S_{\alpha\beta}, \\ V\gamma V\alpha\beta &= \beta S_{\gamma\alpha} - \alpha S_{\beta\gamma}, \end{aligned}$$

складывая которые, получимъ:

$$V\alpha V\beta\gamma + V\beta V\gamma\alpha + V\gamma V\alpha\beta = 0. \quad (115)$$

Это равенство и доказываетъ теорему: три бивектора $V\alpha V\beta\gamma, V\beta V\gamma\alpha, V\gamma V\alpha\beta$ взаимно уничтожаются, слѣдовательно ихъ оси, которыхъ, очевидно, суть линіи кратчайшихъ разстояній между противоположными сторонами шестиугольника, всѣ пересѣкаютъ одну и ту же прямую подъ прямымъ угломъ. Предъидущее равенство, которое имѣеть мѣсто, каковы бы ни были α, β, γ , даетъ намъ болѣе того, что выражаетъ теорема, оно даетъ намъ тензоры трехъ бивекторовъ, которые, имѣя своими осами линіи кратчайшихъ разстояній, взаимно уничтожаются:

$$\begin{aligned} TV\alpha V\beta\gamma &= T\alpha T\beta T\gamma sna\ snl, \\ TV\beta V\gamma\alpha &= T\alpha T\beta T\gamma snb\ snm, \\ TV\gamma V\alpha\beta &= T\alpha T\beta T\gamma snc\ snn. \end{aligned}$$

Но, умноживъ взаимно уничтожающіеся бивекторы на одно и то же число, получимъ бивекторы, которые также будутъ взаимно уничтожаться, а потому, если мы умножимъ

бивекторы $V\alpha V\beta\gamma$, $V\beta V\gamma\alpha$, $V\gamma V\alpha\beta$ на (с: $T\alpha T\beta T\gamma$ снасл) и воспользуемся формулами (114), то получимъ следующую теорему.

Три бивектора, осями которыхъ служатъ линии кратчайшихъ разстояній между противоположными сторонами шестиугольника съ прямыми углами и тензоры которыхъ соответственно суть $stgl$, $stgm$, $stgn$, иль съ совершенно произвольное комплексное число и l , m , n комплексные углы между соответствующими противоположными сторонами шестиугольника, слагаясь, взаимно уничтожаются.

91. *Механика бивектора и системы бивекторовъ.* Общая теорема, формулированная нами въ § 61, весьма естественно приводить къ механикѣ бивектора. Понятно, что, желая сохранить аналогію съ механикой точки, мы должны назвать скоростью бивектора α , координаты которого x, y, z суть нѣвекторы функции времени—вещественного перемѣнного t_0 , или комплексного перемѣнного $t = t_0 + \omega t_1$, бивекторъ β , имѣющій своими координатами:

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt},$$

ускореніемъ—бивекторовъ β' съ координатами:

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2};$$

силой приложенной къ α —произведеніе $m\beta'$, гдѣ m есть нѣкоторое постоянное, независящее отъ t , комплексное число $m_0 + \omega m_1$ —масса бивектора α .

Скорость бивектора α характеризуетъ съ точностью до величинъ бесконечно малыхъ первого порядка движение его въ теченіи бесконечно-малаго промежутка времени $\tau = \tau_0 + \omega \tau_1$. Такъ, $S(\beta/\alpha)$ опредѣляетъ измѣненіе $T\alpha$:

$$\frac{1}{T\alpha} \frac{dT\alpha}{dt} = S \frac{\beta}{\alpha};$$

бивекторъ же $V(\beta/\alpha)$ характеризуетъ перемѣщеніе оси α . Движеніе оси α будетъ таково, какъ если бы она принадлежала неизмѣняемой системѣ, перемѣщеніе которой въ теченіи безконечно малаго промежутка τ_0 опредѣляется бивекторомъ $\tau V(\beta/\alpha)$. Подобнымъ же образомъ ускореніе первого и слѣдующихъ порядковъ опредѣляютъ движеніе бивектора въ теченіи промежутка времени τ съ точностью до величинъ втораго и слѣдующихъ порядковъ.

Введя и изслѣдовавъ эти понятія, мы¹ будемъ имѣть возможность извѣстнымъ образомъ интерпретировать уравненія и теоремы механики точки или системы точекъ, когда какъ координаты точекъ, такъ и массы, силы и время становятся комплексными числами. Такъ напримѣръ, законъ площадей центральнаго движенія точки при такомъ tolkovaniі принимаетъ видъ:

Если бивекторъ α и его ускореніе β' имѣютъ общую ось, то векторное произведение бивектора α и его скорости β будетъ во все времена движенія постоянно. Слѣдовательно, бивекторъ α и его скорость β будутъ принадлежать одной и той же щеткѣ, и сумма параметровъ главныхъ винтовъ цилиндра, построенного на α и β будетъ постоянна.

Понятіе о скорости и ускореніи бивектора могутъ быть весьма полезны въ нѣкоторыхъ вопросахъ механики. Такъ, если мы будемъ разсматривать неизмѣняемую систему, какъ совокупность бивекторовъ связанныхъ между собой, бивекторовъ, тензоры которыхъ постоянны, то методомъ перенесенія кинематика твердаго тѣла, вращающагося вокругъ точки преобразуется въ кинематику общаго случая движенія. Мы приходимъ такимъ образомъ къ обобщенію теоремы Coriolis'a, формулы Savary и нѣкоторымъ другимъ интереснымъ результатамъ.

Мы не будемъ однако останавливаться на этихъ результатахъ, ибо думаемъ, что уже достаточно пояснили въ предыдущихъ §§ методъ перенесенія и достигли такимъ образомъ цѣли, которую имѣли въ виду въ этой главѣ. Кромѣ того, изложеніе упомянутыхъ результатовъ заняло бы слишкомъ много места, такъ какъ ради него мы должны были бы войти въ нѣкоторыя подробности кинематики твердаго тѣла и теоріи линейчатыхъ поверхностей.

Вопросамъ, намѣченнымъ въ этомъ параграфѣ, а также затронутымъ въ другихъ мѣстахъ этой главы, мы предполагаемъ посвятить особую работу.

Г л а в а II.

92. *Основные определения и теоремы теории групп винтовъ.* Эту главу мы посвящаемъ изученію тѣхъ многообразій бивекторовъ, которые опредѣляются линейными, однородными относительно Plücker'овыхъ координатъ, уравненіями и называются группами винтовъ. Если Q есть одинъ изъ бивекторовъ многообразія, то въ силу однородности уравненій, всѣ бивекторы вида aQ (гдѣ a какое угодно вещественное число) которые, отличаясь отъ Q только длиною главного вектора, лежатъ на одномъ и томъ же винтѣ Q , будутъ принадлежать многообразію; поэтому, при изученіи группъ, мы должны обращать наше вниманіе главнымъ образомъ на винты, опредѣляемые бивекторами многообразія, а не на самыя бивекторы.

Винты Q_1, Q_2, \dots, Q_n (винты, опредѣляемые бивекторами Q_1, Q_2, \dots, Q_n) называются зависимыми, если существуютъ такие вещественные числа $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$, что

$$e_1 Q_1 + e_2 Q_2 + \dots + e_n Q_n = 0, \quad (1)$$

и независимыми въ противномъ случаѣ. Очевидно, что уравненіе (1) эквивалентно шести линейнымъ, однороднымъ относительно $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$, уравненіямъ, которые получатся, если, представивъ бивекторы Q комплексными числами

$$Q_s = p_s i + q_s j + r_s k + \omega (a_s i + b_s j + c_s k), \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

приравняемъ нулю коэффициенты при комплексныхъ единицахъ $i, j, k, \omega i, \omega j, \omega k$ въ уравненіи (1). Когда эти шесть уравненій могутъ быть удовлетворены хотя одной системой значений e_1, e_2, \dots, e_n , будетъ имѣть мѣсто ур. (1) и винты Q будутъ зависимы; когда же уравненія будутъ несовмѣстны, то

винты Q будут независимы. При $n > 6$ упомянутыя шесть уравнений всегда могут быть удовлетворены; следовательно семь и большее число винтовъ всегда зависимы.

Пусть винты Q_1, Q_2, \dots, Q_n независимы. Умноживъ ихъ на какіе нибудь вещественныя числа a_1, a_2, \dots, a_n , построимъ винтъ Q , опредѣляемый бивекторомъ

$$Q = a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + \dots + a_n Q_n. \quad (2)$$

Если вещественнымъ числамъ a_1, a_2, \dots, a_n будемъ давать всевозможныя значенія, то получимъ безчисленное множество винтовъ Q , совокупность которыхъ и называется n -членной группой винтовъ. Винты Q_1, Q_2, \dots, Q_n называются основными винтами группы, а числа a_1, a_2, \dots, a_n винтовыми координатами или координатами Ball'я винта Q группы. Такъ какъ винты Q и $aQ = aa_1 Q_1 + aa_2 Q_2 + \dots$ тождественны, то координаты Ball'я суть однородныя координаты. Очевидно, что основные винты группы, Q_1, Q_2, \dots, Q_n , принадлежатъ группѣ.

Теорема I. Если винты Q_1, Q_2, \dots, Q_n независимы, то для того, чтобы m винтовъ $m \leq n$

$$\sigma_l = a_{l1} Q_1 + a_{l2} Q_2 + \dots + a_{ln} Q_n \quad (l = 1, 2, \dots, m) \quad (3)$$

были независимы, необходимо и достаточно, чтобы хотя одинъ изъ опредѣлителей матрицы

$$\left| \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & \dots & a_{mn} \end{array} \right| \quad (4)$$

былъ отличенъ отъ нуля.

Въ самомъ дѣлѣ, если все опредѣлители равны нулю, то существуетъ m величинъ b_1, b_2, \dots, b_m такихъ, что

$$a_{1s} b_1 + a_{2s} b_2 + \dots + a_{ms} b_m = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

и потому, умножая ур. (3) b_l и суммируя по l , получаемъ

$$b_1 \sigma_1 + b_2 \sigma_2 + \dots + b_m \sigma_m = 0, \quad (5)$$

откуда слѣдуетъ, что винты σ зависимы. Обратно, если винты σ зависимы, то между ними существуетъ соотношеніе вида (5), изъ втораго, если выразимъ σ черезъ σ [ур. (3)], имѣмъ:

$$c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + \dots + c_n\sigma_n = 0,$$

гдѣ $c_s = a_{1s}b_1 + a_{2s}b_2 + \dots + a_{ms}b_m$ ($s = 1, 2, \dots, n$). Всѣ величины c_s должны быть равны нулю, ибо, если бы хотя одна изъ нихъ была отлична отъ нуля, то послѣднее равенство противорѣчило бы предположенію, что винты σ независимы. Изъ равенствъ же $c_s = 0$ слѣдуетъ, что всѣ опредѣлители (4) обращаются въ нуль.

Теорема II. За основные винты группы можно принять какіе угодно n независимыхъ винтовъ, входящихъ въ группу.

Возьмемъ n винтовъ $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ группы (2), опредѣляемыхъ равенствами (3), въ которыхъ полагаемъ $m = n$, и предположимъ, что они независимы, и слѣдовательно $|a_{st}| \neq 0$. Это послѣднее условіе позволяетъ намъ рѣшить ур. (3) относительно σ и выразить такимъ образомъ σ черезъ σ :

$$\sigma_s = b_{s1}\sigma_1 + b_{s2}\sigma_2 + \dots + b_{sn}\sigma_n \quad (s = 1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

Чтобы доказать теорему нужно только показать, что всякий винтъ σ группы (2), опредѣляемой винтами $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ [ур. (2)], можетъ быть представленъ въ видѣ $\sigma = B_1\sigma_1 + B_2\sigma_2 + \dots + B_n\sigma_n$, (7), гдѣ B_1, B_2, \dots, B_n вещественные числа, и, слѣдовательно, принадлежитъ группѣ (σ) , опредѣляемой винтами $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, и что обратно всякий винтъ $\sigma = b_1\sigma_1 + b_2\sigma_2 + \dots + b_n\sigma_n$, (8), группы (σ) можно представить въ видѣ $\sigma = A_1\sigma_1 + A_2\sigma_2 + \dots + A_n\sigma_n$, (9), гдѣ A_1, A_2, \dots, A_n нѣкоторыя вещественные числа, и, слѣдовательно, можно разматривать какъ винтъ группы (2). Доказательство не представляетъ никакихъ затрудненій, стоитъ только въ равенствѣ (2) выразить σ_s черезъ σ ($s = 1, 2, \dots, n$), пользуясь уравненіями (6), и мы получимъ равенство (7), въ равенствѣ же (8) выразить σ_s черезъ σ посредствомъ ур. (3), и мы получимъ (9).

Теорема III. Если параметры основныхъ винтовъ группы увеличимъ на одну и ту же величину Pc , то параметры всѣхъ винтовъ группы увеличатся на ту же величину.

Для доказательства нужно умножить ур. (2) на $c_0(1 + \omega P c)$.

93. Классификация групп; канонический вид группы.
Для удобства дальнейшего изложения условимся говорить, что комплексное переменное число $a = a_0 + \omega a_1$, одночленно, если оно при всех своих изменениях или остается вещественным ($a_1 = 0$), или всегда иметь вид $\omega a_1 (a_0 = 0)$. В первом случае оно будет одночленным числом параметра нуль, во втором—одночленным числом бесконечно большого параметра. Если же комплексное число может получать всевозможные значения, так что a_0 и a_1 могут быть и не равны нулю, то будем называть его двучленным.

Пусть имеем три бивектора α, β, γ , у которых параметры конечны, а оси не параллельны одной плоскости, так что $a_0 \neq 0, \beta_0 \neq 0, \gamma_0 \neq 0$ и a_0, β_0, γ_0 не лежат в одной плоскости. При этих условиях $S\alpha\beta\gamma \neq 0$ и $PS\alpha\beta\gamma \neq \infty$ [см. § 79], и нельзя найти ни вещественных, ни комплексных чисел a, b, c таких, чтобы $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$. В самом деле, предполагая, что выбор таких чисел возможен и что по крайней мере одно из них, a , отлично от нуля, умножив обе части равенства $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ на $V\beta\gamma$ и взяв скалярные части произведений, в силу тождества $S\beta V\beta\gamma = S\gamma V\beta\gamma = 0$, получим равенство $aS\alpha\beta\gamma = 0$, которое при $a \neq 0$ возможно было бы только в двух предположениях: или, когда $S\alpha\beta\gamma = 0$, или, когда $PS\alpha\beta\gamma = \infty$, противоречащих условиям относительно α, β, γ .

Развернув первую часть неравенства $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$, имеем неравенство $a_0\alpha + b_0\beta + c_0\gamma + a_1(\omega\alpha) + b_1(\omega\beta) + c_1(\omega\gamma) \neq 0$, которое влечет за собой целый ряд других неравенств, если положим некоторые из чисел $a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1$ равными нулю:

$$\begin{array}{ll} \alpha \neq 0, & (a_1 = 0, b = c = 0) \\ \omega\alpha \neq 0, & (a_0 = 0, b = c = 0) \\ a_0\alpha + a_1(\omega\alpha) \neq 0, & (b = c = 0) \end{array}$$

и т. д., и т. д..

Изъ этихъ неравенствъ заключаемъ, что винты каждой изъ слѣдующихъ системъ:

- | | |
|---------------------------|-------------------|
| I | $(b = c = 0)$ |
| 1) α | 2) $\omega\alpha$ |
| 3) $\alpha, \omega\alpha$ | |

II ($c = 0$)

- 1) α, β
- 2) $\alpha, \omega\beta$
- 3) $\omega\alpha, \omega\beta$
- 4) $\alpha, \beta, \omega\beta$
- 5) $\omega\alpha, \beta, \omega\beta$
- 6) $\alpha, \beta, \omega\alpha, \omega\beta$

III

- 1) α, β, γ
- 2) $\alpha, \beta, \omega\gamma$
- 3) $\alpha, \omega\beta, \omega\gamma$
- 4) $\omega\alpha, \omega\beta, \omega\gamma$
- 5) $\alpha, \beta, \gamma, \omega\gamma$
- 6) $\alpha, \omega\beta, \gamma, \omega\beta$
- 7) $\omega\alpha, \omega\beta, \gamma, \omega\gamma$
- 8) $\alpha, \beta, \omega\beta, \gamma, \omega\gamma$
- 9) $\omega\alpha, \beta, \omega\beta, \gamma, \omega\gamma$
- 10) $\alpha, \omega\alpha, \beta, \omega\beta, \gamma, \omega\gamma$.

между собой независимы. Поэтому помошью бивекторовъ α, β, γ мы можемъ составить слѣдующія группы.

- (1,I,0) Одночленную $\rho = a_0\alpha$
- (1,I,1) Одночленную $\rho = a_1(\omega\alpha)$
- (2,I,1) Двучленную $\rho = a_0\alpha + a_1(\omega\alpha) = a\alpha$
- (2,II,0) Двучленную $\rho = a_0\alpha + b_0\beta$
- (2,II,1) Двучленную $\rho = a_0\alpha + b_1(\omega\beta) = a_0\alpha + \omega b_1\beta$
- (2,II,2) Двучленную $\rho = a_1(\omega\alpha) + b_1(\omega\beta) = \omega a_1\alpha + \omega b_1\beta$.
- (3,II,1) Трехчленную $\rho = a_0\alpha + b_0\beta + b_1(\omega\beta) = a_0\alpha + b\beta$.
- (3,II,2) Трехчленную $\rho = a_1(\omega\alpha) + b_0\beta + b_1(\omega\beta) = \omega a_1\alpha + b\beta$.
- (4,II,2) Четырехчленную $\rho = a_0\alpha + a_1(\omega\alpha) + b_0\beta + b_1(\omega\beta) = a\alpha + b\beta$.
- (3,III,0) Трехчленную $\rho = a_0\alpha + b_0\beta + c_0\gamma$.
- (3,III,1) Трехчленную $\rho = a_0\alpha + b_0\beta + c_1(\omega\gamma) = a_0\alpha + b_0\beta + \omega c_1\gamma$.
- (3,III,2) Трехчленную $\rho = a_0\alpha + b_1(\omega\beta) + c_1(\omega\gamma) = a_0\alpha + \omega b_1\beta + \omega c_1\gamma$.
- (3,III,3) Трехчленную $\rho = a_1(\omega\alpha) + b_1(\omega\beta) + c_1(\omega\gamma) = \omega a_1\alpha + \omega b_1\beta + \omega c_1\gamma$.
- (4,III,1) Четырехчленную $\rho = a_0\alpha + b_0\beta + c_0\gamma + c_1(\omega\gamma) = a_0\alpha + b_0\beta + c\gamma$.
- (4,III,2) Четырехчленную $\rho = a_0\alpha + b_1(\omega\beta) + c_0\gamma + c_1(\omega\gamma) = a_0\alpha + \omega b_1\beta + c\gamma$.

$$(4,III,3) \text{ Четырехчленную } O = a_1(\omega\alpha) + b_1(\omega\beta) + c_0\gamma + c_1(\omega\gamma) = \\ \omega a_1\alpha + \omega b_1\beta + c\gamma.$$

$$(5,III,2) \text{ Пятичленную } O = a_0\alpha + b_0\beta + b_1(\omega\beta) + c_0\gamma + c_1(\omega\gamma) = \\ = a_0\alpha + b\beta + c\gamma.$$

$$(5,III,3) \text{ Пятичленную } O = a_1(\omega\alpha) + b_0\beta + b_1(\omega\beta) + c_0\gamma + c_1(\omega\gamma) = \\ = \omega a_1\alpha + b\beta + c\gamma.$$

$$(6,III,3) \text{ Шестичленную } O = a_0\alpha + a_1(\omega\alpha) + b_0\beta + b_1(\omega\beta) + c_0\gamma + \\ + c_1(\omega\gamma) = aa + b\beta + c\gamma.$$

Такъ какъ для построенія первыхъ трехъ группъ достаточно знать одинъ бивекторъ α , то мы назовемъ ихъ одноосными группами. Для построенія слѣдующихъ шести группъ надо имѣть два бивектора α и β , а потому эти шесть группъ мы назовемъ двуосными. Наконецъ остальные десять группъ, которые опредѣляются тремя бивекторами α, β, γ , назовемъ трехъ-осными группами.

Что касается до трехъ, поставленныхъ въ скобкахъ цифръ, которыми мы означаемъ группу, то онѣ имѣютъ слѣдующія значенія. Первая означаетъ число членовъ группы, вторая, римская, число ея осей, ваконецъ третья число независимыхъ винтовъ безконечно большаго параметра, входящихъ въ группу.

Всѣ перечисленныя группы, получаются, если мы будемъ строить винты $O = aa + b\beta + c\gamma$, ограничивая всякий разъ выборъ чиселъ a, b, c особыми условіями.

Если два изъ чиселъ a, b, c , напр. b и c , будутъ равны нулю, то мы получаемъ одноосные группы, а именно: когда a будетъ одночленнымъ числомъ параметра нуль ($a = a_0$), будемъ имѣть группу (1,I,0), когда a будетъ безконечно большимъ параметра ($a = \omega a_1$), получаемъ группу (1,I,1), наконецъ когда a будетъ двучленнымъ, имѣемъ группу (2,I,1).

Если одно изъ чиселъ a, b, c , напр. c , будетъ равно нулю, то мы получаемъ группы двуосные. При томъ, если a, b будутъ одвочленными, то имѣемъ двуосные группы указанныхъ типовъ: когда $Pa = Pb = 0$, имѣемъ группу (2,II,0), когда $Pa = 0$, $Pb = \infty$, —группу (2,II,1), когда $Pa = Pb = \infty$ —группу (2,II,2). Если одно изъ чиселъ a, b будетъ двучленнымъ, а другое одночленнымъ, напр. a — одночленнымъ, а b — двучленнымъ, то имѣемъ группы трехчленные: когда $Pa = 0$, —группу (3,II,1), когда $Pa = \infty$, —группу (3,II,2). Наконецъ, если оба числа a и b двучленны имѣемъ группу четырехчленную (4,II,2).

Если ни одно изъ чиселъ a, b, c не равно нулю, то мы получаемъ группы трехъосныя. Если a, b, c будутъ одночленны, то имѣемъ группы трехъчленныя: когда $Pa = Pb = Pc = 0$, — группу (3,III,0); когда $Pa = Pb = 0, Pc = \infty$, — группу (3,III,1); когда $Pa = 0, Pb = Pc = \infty$, — группу (3,III,2); когда $Pa = Pb = Pc = \infty$ группу (3,III,3). Если одно изъ чиселъ a, b, c , напр. c , будетъ дву- членнымъ, а остальные одночленными, то имѣемъ группы четырехъчленныя: когда $Pa = Pb = 0$, — группу (4,III,1); когда $Pa = 0, Pb = \infty$, — группу (4,III,2); когда $Pa = Pb = \infty$, — группу (4,III,3). Если два изъ чиселъ a, b, c , напр. b и c , дву- членны, то имѣемъ группы пятичленныя: когда $Pa = 0$, — группу (5,III,2), когда $Pa = \infty$, — группу (5,III,3). Наконецъ когда всѣ три числа a, b, c дву- членны имѣемъ группу шестичленную.

Теорема. Измѣнная основные винты группы [§ 92, теор. II], можемъ всякую группу привести къ одному изъ вышеуказанныхъ типовъ.

Доказательство этой теоремы требуетъ разсмотрѣнія довольно большаго числа частныхъ случаевъ и потому мы не будемъ его здѣсь приводить. Замѣтимъ только, что теорема доказывается уже легко для четырех- и пяти-членныхъ группъ, если она доказана для дву- и трехъчленныхъ группъ: стоитъ только показать, что въ составѣ четырехъчленной группы входитъ по крайней мѣрѣ одна дву- членная одноосная группа типа (2,I,1), а въ составѣ пятичленной группы такихъ группъ входитъ двѣ. Вышеуказанные формы группъ назовемъ каноническими формами. Слѣдовательно, всякую группу можно привести къ каноническому виду.

94. Группы одноосныя. Свойства группъ различныхъ типовъ хорошо изслѣдованы. (Въ русской литературѣ см. И. Занчевскій, I. с.; Д. Зейлигеръ, „Механика подобно-измѣняющейся системы“. Зап. Мат. Отд. Нов. Общ. Ест., Томы XI и XIII). Поэтому мы не будемъ на нихъ подробно останавливаться, перечислимъ только нѣкоторыя отчасти, чтобы показать, какимъ образомъ къ изученію свойствъ группъ прилагается винтовое счисление, отчасти, съ цѣлью воспользоваться ими въ дальнѣйшемъ изложеніи.

Группа (1,I,0) $\varrho = a_0\alpha$ состоитъ изъ одного винта конечного параметра.

Группа (1,I,1) $\varrho = \omega a_1\alpha$ состоитъ изъ одного винта безконечно большаго параметра.

Группа (2,1,1) $\rho = a\alpha$. Всё винты группы имеют общую ось α . Параметры винтов могут быть какие угодно, ибо $P\rho = Pa + P\alpha$ и Pa совершенно произвольны.

95. Группы двуосные. Пусть нам дана двуосная группа $\rho = a\alpha + b\beta$. Взявъ какиенибудь два винта группы, $\rho' = a'\alpha + b'\beta$ и $\rho'' = a''\alpha + b''\beta$, имеемъ

$$V\rho'\rho'' = (a'b'' - a''b') V\alpha\beta, \quad (10)$$

откуда, замѣчая, что осью $V\rho'\rho''$ служитъ линія кратчайшаго разстоянія между осями ρ' и ρ'' , заключаемъ, что оси всѣхъ винтовъ группы имеютъ общую линію кратчайшаго разстоянія, ось $V\alpha\beta$. Такимъ образомъ имеемъ теорему:

Теорема I. Оси винтовъ двуосной группы принадлежатъ одной и той же щеткѣ.

Беря параметры отъ обѣихъ частей предыдущаго равенства, получаемъ:

$$PV\rho'\rho' = P(a'b'' - a''b') + PV\alpha\beta,$$

или, означая комплексный уголъ между осями ρ' и ρ'' черезъ $\theta = \theta_0 + \omega\theta_1$,

$$P\rho' + P\rho'' + \theta_1 \operatorname{ctg} \theta_0 = P(a'b'' - a''b') + PV\alpha\beta. \quad (11)$$

Эта формула общая для всѣхъ двуосныхъ группъ.

Рассмотримъ некоторые общія свойства двученныхъ группъ. Для двученныхъ группъ числа $a, b, a', b', a''b''$ одночлены, одночленно будетъ также и число $(a'b'' - a''b')$ и потому изъ равенства (10) слѣдуетъ

Теорема II. Векторное умноженіе двухъ произвольно взятыхъ винтовъ двученной группы даетъ всегда одинъ и тотъ же винтъ.

Такимъ образомъ, если три винта, опредѣляемыхъ бивекторами α, β, γ , принадлежать двученной группѣ, то бивекторы $V\beta\gamma, V\gamma\alpha, V\alpha\beta$ имеютъ общую ось и одинаковый параметръ, и слѣдовательно существуетъ такихъ три вещественныхъ числа a_0, b_0, c_0 , что $a_0 V\beta\gamma = b_0 V\gamma\alpha = c_0 V\alpha\beta$. Докажемъ, что положеніе обратное также справедливо.

Теорема III. Если три бивектора α, β, γ удовлетворяютъ соотношенію:

$$a_0 V\beta\gamma = b_0 V\gamma\alpha = c_0 V\alpha\beta, \quad (12)$$

ибо a_0, b_0, c_0 отличны от нуля, то винты α, β, γ зависимы и, следовательно, принадлежат двучленной группе.

Теорема очевидна, если оси α и β совпадают. Тогда $V\alpha\beta = V\beta\gamma = V\gamma\alpha = 0$, а это значит, что ось γ совпадает с осами α и β и стало быть винты α, β, γ зависимы.

Предположим, поэтому, что оси α и β не совпадают. Изъ равенства $b_0 V\gamma\alpha = c_0 V\alpha\beta$, имеемъ $V(b_0\gamma + c_0\beta)\alpha = 0$, откуда заключаемъ, что бивекторы $b_0\gamma + c_0\beta$ и α имеютъ общую ось, такъ что $b_0\gamma + c_0\beta$ можемъ получить, если α умножимъ на некоторое комплексное, надлежащимъ образомъ определенное, число $e_0 + \omega e_1$:

$$b_0\gamma + c_0\beta = (e_0 + \omega e_1)\alpha.$$

Также изъ равенства $c_0 V\alpha\beta = a_0 V\beta\gamma$ находимъ

$$c_0\alpha + a_0\gamma = (f_0 + \omega f_1)\beta.$$

Исключая изъ этихъ равенствъ γ , имеемъ:

$$(a_0c_0 + b_0f_0 + \omega b_0f_1)\beta = (b_0c_0 + a_0e_0 + \omega a_0e_1)\alpha$$

Такъ какъ оси α и β не совпадаютъ, то коэффициенты при нихъ должны быть равны нулю:

$$\begin{aligned} a_0c_0 + b_0f_0 &= 0, & b_0f_1 &= 0, \\ b_0c_0 + a_0e_0 &= 0, & a_0e_1 &= 0, \end{aligned}$$

откуда $e_0 = f_1 = 0$, $f_0 = -(a_0c_0)$: $b_0e_0 = -(b_0c_0)$: a_0 и следовательно

$$b_0c_0\alpha + c_0a_0\beta + a_0b_0\gamma = 0,$$

что и доказываетъ справедливость теоремы.

Изъ предыдущихъ теоремъ вытекаютъ такие следствія.

I. Оси $V\beta\gamma$, $V\gamma\alpha$, $V\alpha\beta$ должны совпадать и параметры ихъ должны быть одинаковы для того, чтобы можно было подыскать такие числа a_0, b_0, c_0 , которые удовлетворяли бы равенству (12). Поэтому, если мы означимъ комплексные углы между осями α, β, γ черезъ $\varphi_0 + \omega d_0$, $\varphi_1 + \omega d_1$, $\varphi_2 + \omega d_2$, то предыдущія двѣ теоремы можно соединить въ одну

Для того, чтобы три винта α, β, γ были зависимы необходимо и достаточно, чтобы оси ихъ принадлежали одной щеткѣ и

$$P\beta + P\gamma + d_1 ctg\varphi_1 = P\gamma + Pa + d_1 ctg\varphi_2 = Pa + P\beta + d_1 ctg\varphi_3$$

II. Если $a_0 = b_0 = -1$, $c_0 = 1$, то $\gamma = \alpha + \beta$, $V\gamma\beta = V\alpha\gamma = V\alpha\beta$, откуда

$$\frac{Ta}{sn(\gamma\beta)} = \frac{T\beta}{sn(\alpha\gamma)} = \frac{T\gamma}{sn(\alpha\beta)}.$$

Такимъ образомъ, когда $\gamma = \alpha + \beta$, между $T\alpha$, $T\beta$, $T\gamma$ и углами $(\alpha\beta)$, $(\beta\gamma)$, $(\alpha\gamma)$ существуютъ соотношения, аналогичные формуламъ плоской тригонометрии.

Группа (2, II, 0) $o = a_0\alpha + b_0\beta$. Въ группѣ есть винтовъ безконечно большаго параметра, ибо $a_0\alpha_0 + b_0\beta_0 \neq 0$. Такъ какъ положеніе оси o зависитъ только отъ отношенія b_0/a_0 , то оси винтовъ группы располагаются на поверхности, которая называется цилиндроидомъ. Въ группѣ есть два винта, оси которыхъ пересѣкаются подъ прямымъ угломъ. Въ самомъ дѣлѣ условие, чтобы оси винтовъ $o' = a_0'\alpha + b_0'\beta$ и $o'' = a_0''\alpha + b_0''\beta$ пересѣкались подъ прямымъ угломъ выражается равенствомъ

$$S_o'o'' = a_0'a_0''\alpha^2 + (a_0'b_0'' + a_0''b_0')Sa\beta + b_0'b_0''\beta^2 = 0,$$

которое, если положимъ для простоты $a_0' = \beta_0' = -1$ и замѣнимъ α', β' , $Sa\beta$ черезъ $-(1 + 2Pa.\omega)$, $-(1 + 2P\beta.\omega)$, $S_0\alpha\beta + \omega S_1\alpha\beta$, распадается на два:

$$a_0'a_0'' - (a_0'b_0'' + a_0''b_0')S_0\alpha\beta + b_0'b_0'' = 0,$$

$$2Pa_0'a_0'' - (a_0'b'' + a_0''b')S_1\alpha\beta + 2P\beta b_0'b_0'' = 0.$$

Проведемъ въ плоскости координатныхъ оси, образующія уголъ равный углу φ между осами α и β и будемъ считать величины a_0 и b_0 координатами точекъ въ этой плоскости. Тогда задача объ определеніи величинъ a_0', b_0', a_0'', b_0'' , удовлетворяющихъ предыдущимъ двумъ уравненіямъ, очевидно, будетъ тождественна съ задачей нахожденія двухъ диаметровъ,

которые были бы одновременно сопряженными въ двухъ ко-
ническихъ съченіяхъ

$$a_0^2 + 2a_0 b_0 \cos\varphi + b_0^2 = \text{const.},$$
$$P\alpha a_0^2 - a_0 b_0 S_1 \alpha\beta + P\beta b_0^2 = \text{const.},$$

изъ которыхъ первое представляетъ кругъ. Такъ какъ сопря-
женные діаметры круга взаимно перпендикулярны, то задача
приводится къ определенію главныхъ діаметровъ второй кри-
вой. Найдя ихъ, будемъ знать числа a'_0, b'_0, a''_0, b''_0 и винты ρ' ,
 ρ'' , оси которыхъ встрѣчаются подъ прямымъ угломъ. Эти
винты называются главными винтами группы. Принявъ ихъ
за основные винты α и β группы, будемъ имѣть $S\alpha\beta = 0$, такъ
что, возвышая $\rho = a_0\alpha + b_0\beta$ въ квадратъ, получимъ $\rho^2 = a_0^2\alpha^2 +$
 $b_0^2\beta^2$, откуда

$$-\rho_0^2 = a_0^2 + b_0^2,$$

$$P\rho = \frac{a_0^2 P\alpha + b_0^2 P\beta}{a_0^2 + b_0^2}$$

—основная формула для параметра винта двучленной группы.
Если за точку приведенія примемъ точку пересѣченія осей
главныхъ винтовъ, то $\alpha_1 = \alpha_0 P\alpha, \beta_1 = \beta_0 P\beta, \rho_0 = a_0\alpha_0 + b_0\beta_0, \rho_1 =$
 $a_0\alpha_0 P\alpha + b_0\beta_0 P\beta$, и для перпендикуляра, опущенного на ось
винта ρ , получимъ формулу [(3) § 30]:

$$\chi = \frac{V\rho_1\rho_0}{\rho_0^2} = \frac{a_0 b_0}{a_0^2 + b_0^2}, (P\beta - P\alpha) V\alpha_0\beta_0.$$

Это другая основная формула двучленной группы, изъ
которой легко выводится уравненіе цилиндроида въ прямо-
угольныхъ координатахъ.

Изъ формулы (11), въ которой въ случаѣ двучленной
группы $P(a'b'' - a''b') = 0$, вытекаетъ такая теорема.

Теорема IV. *Какумбы пару винтовъ ρ', ρ'' двучленной группы
мы ни взяли, сумма $P\rho' + P\rho'' + \theta_1 \sin\theta_0$ остается величиной
постоянной равной суммѣ параметровъ главныхъ винтовъ
 $P\alpha + P\beta$.*

Цилиндроидъ поверхность линейчатая. Каждой образующей линейчатой поверхности соответствует определенное число — параметръ образующей, предѣль отнoшения кратчайшаго разстоянія между рассматриваемой образующей и образующей къ ней безконечно близкой къ углу между ними, или, что въ предѣль все равно, къ тангенсу этого угла. Предыдущая теорема даетъ весьма простое средство определить параметръ каждой образующей цилиндроида. Съ этой целью предположимъ, что оси винтовъ ϱ' и ϱ'' безконечно близки; тогда $\theta_1 \operatorname{ctg} \theta_0$ будетъ отличаться на безконечно малую величину отъ параметра той образующей, которая служитъ осью винта ϱ' ; $P\varrho''$ будетъ отличаться на безконечно малую величину отъ $P\varrho'$ и въ предѣль будемъ имѣть:

$$2P\varrho' + \lim_{\theta_1 \operatorname{ctg} \theta_0} = Pa + P\beta,$$

или

$$\lim_{\theta_1 \operatorname{ctg} \theta_0} = \frac{a_0^2 - b_0^2}{a_0^2 + b_0^2} (P\beta - Pa)$$

что даетъ теорему:

Теорема V. Сумма удвоенного параметра какого либо винта двучленной группы и параметра образующей цилиндроида, которая служитъ для этого винта осью, есть величина постоянная, равная суммѣ параметровъ главныхъ винтовъ.

Группа (2, II, 1) $\varrho = a_0 \alpha + \omega \beta$. Въ группѣ одинъ винтъ безконечно большаго параметра ($\omega \beta_0$). Оси винтовъ конечнаго параметра параллельны оси α и, следовательно, лежать въ одной плоскости, образуя пучекъ параллельныхъ прямыхъ. Параметръ винта ϱ

$$P\varrho = \frac{Sa_0 \alpha_0 (a_0 \alpha_1 + b_1 \beta_0)}{a_0^2 \alpha_0^2} = Pa + \frac{b_1}{a_0} \frac{Sa_0 \beta_0}{\alpha_0^2}$$

есть линейная функция отъ b_1/a_0 . Когда $Sa_0 \beta_0 = 0$, то въ группѣ есть винтъ параметра нуль. Если примемъ его за основной винтъ, то $Pa = 0$ и $P\varrho$ будетъ пропорционаленъ b_1/a_0 . Когда оси α и β перпендикулярны, то $Sa_0 \beta_0 = 0$ и всѣ винты конечнаго параметра имѣютъ параметръ одинаковый. Принявъ точку приведенія на оси α , получимъ для перпендикуляра, опущенного на ось ϱ выражение:

$$\chi = \frac{b_1}{a_0} \frac{Va_0\beta_0}{\alpha_0},$$

изъ котораго, благодаря переменной величинѣ b_1/a_0 , слѣдуетъ, что всякая прямая вышеупомянутаго пучка служить осью одного и только одного винта группы.

Группа (2, II, 2) $\rho = \omega a_0 \alpha + \omega b_1 \beta$. Въ группѣ два независимыхъ винта безконечно большаго параметра. Всѣ винты имѣютъ безконечно большой параметръ; оси ихъ параллельны плоскости (α_0, β_0) .

Группа (3, II, 1) $\rho = a_0 \alpha + b \beta$. Въ группу входитъ одинъ винтъ безконечно большаго параметра ($\omega \beta$). Винты этой группы опредѣляются прямолинейнымъ многообразіемъ бивекторовъ $(a_0 = 1)$ [см. § 89, (110)].

Безчисленное множество винтовъ имѣютъ общую ось съ $\beta (a_0 = 0)$; параметры ихъ могутъ быть какіе угодно. Всякій другой лучъ щетки (α, β) служить осью одного и только одного винта группы. Въ самомъ дѣлѣ, если онъ параллеленъ оси β ($a_0 = 0$), то параметръ ему отвѣчающій безконечно великъ, если же онъ оси β не параллеленъ, то, взявъ какой нибудь бивекторъ b , который имѣеть его своею осью, по § 80 будемъ имѣть $b = aa + b\beta$, при чмъ $a_0 \neq 0$ (въ противномъ случаѣ оси b и β были бы параллельны). Поэтому можно раздѣлить b на a ; мы получимъ тогда винтъ $b/a = \alpha + (b : a)\beta$, который имѣеть ось σ своею осью и принадлежитъ группѣ. Другаго винта съ тою же осью быть не можетъ, ибо такие два винта отличались бы одинъ отъ другаго комплекснымъ множителемъ вида $f = f_0 + \omega f_1$ ($f_1 \neq 0$), чего быть не можетъ.

Группѣ наѣрное принадлежитъ винтъ, ось котораго пересѣкаетъ ось β подъ прямымъ угломъ. Принявъ его за основной винтъ α группы, совмѣстимъ съ нимъ ось x , ось y направимъ по оси β , а ось щетки (α, β) возьмемъ за ось z . Пусть x, y, z суть координаты какой либо точки на оси винта ρ' группы. Если въ формулѣ (11) примемъ ρ'' за β , то $a'' = 0$, $b'' = 1$, $P(a'b'' - a''b') = Pa'b'' = 0$, $\theta_1 = \varepsilon$, $cotg \theta_0 = y : x$ и мы получаемъ уравненіе

$$(P\rho' - Fa)x + yz = 0$$

гиперболического параболоида, образующія котораго служатъ

осами винтовъ одного и того же параметра $P\varrho'$. Для $P\varrho' = Pa$ гиперболоидъ распадается на двѣ плоскости $y=0, z=0$. Оси y, z принадлежать всѣмъ гиперболоидамъ.

Группа (3, II, 2) $\varrho = \omega a, a + b\beta$. Въ группѣ два независимыхъ винта безконечно большаго параметра.

Оси винтовъ безконечно большаго параметра параллельны плоскости (α_0, β_0) . Оси винтовъ конечнаго параметра параллельны оси β и, слѣдовательно, образуютъ пучекъ параллельныхъ прямыхъ. Совершенно такъ же, какъ въ случаѣ группы (2, II, 1), покажемъ, что всякая прямая этого пучка служить осью винта группы.

Умноживъ $\varrho = \omega a, a + b\beta$ на $f = f_0 + \omega f_1$, получимъ винтъ $\sigma = f\varrho = \omega f_0 a, a + b f_1 \beta$, который очевидно также принадлежитъ группѣ. Такъ какъ σ и ϱ имѣютъ общую ось и $P\sigma = P\varrho + Pf$, то ось винта конечнаго параметра служить осью безчисленнаго множества винтовъ всевозможныхъ параметровъ.

Группа (4, II, 2) $\varrho = aa + b\beta$. Въ группѣ два независимыхъ винта винта безконечно большаго параметра. Каждый лучъ щетки (α, β) служить осью безчисленнаго множества винтовъ какого угодно параметра.

96. *Группы трехъосныя.* $\varrho = aa + b\beta + c\gamma$. Возьмемъ три винта группы:

$$\varrho' = a'\alpha + b'\beta + c'\gamma, \quad \varrho'' = a''\alpha + b''\beta + c''\gamma, \quad \varrho''' = a'''\alpha + b'''\beta + c'''\gamma.$$

Перемножая ихъ и бера скалярныя части произведенія, получаемъ

$$S\varrho'\varrho''\varrho''' = \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{vmatrix} Sa\beta\gamma,$$

откуда, бера параметры обѣихъ частей,

$$PS\varrho'\varrho''\varrho''' = P\Sigma(\pm a'b''c''') + PSa\beta\gamma, \quad (13)$$

или, означивъ комплексный уголъ между осами ϱ' и ϱ'' че-резъ $\theta = \theta_0 + \omega\theta_1$ и комплексный уголъ между осью ϱ''' и линіей кратчайшаго разстоянія между ϱ' и ϱ'' че-резъ $\psi = \psi_0 + \omega\psi_1$,

$$P\varrho' + P\varrho'' + P\varrho''' + \theta_1 ctg\theta_0 - \psi_1 tg\psi_0 = P\Sigma(\pm a'b''c''') + PSa\beta\gamma.$$

Это формула общая для всѣхъ трехъосныхъ группъ.

Группа (3, III, 0) $\rho = a_0\alpha + b_0\beta + c_0\gamma$. Въ группѣ нѣть винтовъ безконечно большаго параметра, ибо $a_0a_0 + b_0b_0 + c_0c_0 \neq 0$. Въ группѣ есть три винта, оси которыхъ пересѣкаются въ одной точкѣ подъ прямымъ угломъ. Въ самомъ дѣлѣ, условіе, чтобы оси винтовъ $\rho' = a'_0\alpha + b'_0\beta + c'_0\gamma$ и $\rho'' = a''_0\alpha + b''_0\beta + c''_0\gamma$ пересѣкались подъ прямымъ угломъ выразится равенствомъ:

$$S\rho'\rho'' = a'_0a''_0\alpha^2 + b'_0b''_0\beta^2 + c'_0c''_0\gamma^2 + S\beta\gamma(b'_0c''_0 + b''_0c'_0) + \\ S\gamma\alpha(c'_0a''_0 + c''_0a'_0) + Sa\beta(a'_0b''_0 + a''_0b'_0),$$

которое, если предположимъ для простоты $\alpha_0^2 = \beta_0^2 = \gamma_0^2 = -1$, будучи развернуто, распадается на два

$$a'_0a''_0 + b'_0b''_0 + c'_0c''_0 - S_0\beta\gamma(b'_0c''_0 + b''_0c'_0) - \\ S_0\gamma\alpha(c'_0a''_0 + c''_0a'_0) - S_0\alpha\beta(a'_0b''_0 + a''_0b'_0) = 0, \quad (14)$$

$$2a'_0a''_0Pa + 2b'_0b''_0P\beta + 2c'_0c''_0Py - S_1\beta\gamma(b'_0c''_0 + b''_0c'_0) - \\ S_1\gamma\alpha(c'_0a''_0 + c''_0a'_0) - S_1\alpha\beta(a'_0b''_0 + a''_0b'_0) = 0. \quad (15)$$

Если черезъ какую нибудь точку проведемъ оси параллельныя осямъ α, β, γ и будемъ считать a_0, b_0, c_0 за координаты точки, отнесенной къ этимъ осямъ, то задача опредѣленія $a'_0, b'_0, c'_0; a''_0, b''_0, c''_0$, удовлетворяющихъ предыдущимъ уравненіямъ сводится, очевидно, къ задачѣ опредѣленія общихъ сопряженныхъ диаметровъ двухъ поверхностей

$$a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 + 2b_0c_0\cos\varphi_1 + 2c_0a_0\cos\varphi_2 + 2a_0b_0\cos\varphi_3 = const.,$$

$$a_0^2Pa + b_0^2P\beta + c_0^2Py - S_1\beta\gamma.b_0.c_0 - \\ S_1\gamma\alpha.c_0.a_0 - S_1\alpha\beta.a_0.b_0 = const.,$$

гдѣ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ углы между осями α, β, γ . Первая поверхность есть сфера. Такъ какъ сопряженные диаметры сферы взаимно перпендикулярны, то задача приводится къ опредѣленію взаимно перпендикулярныхъ диаметровъ второй поверхности. Она имѣеть три главныхъ диаметра, а потому можно найти три такихъ системы чиселъ $a'_0, b'_0, c'_0; a''_0, b''_0, c''_0; a'''_0, b'''_0, c'''_0$, которые будутъ удовлетворять ур. (14) и (15) и еще четыремъ, получающимся изъ нихъ круговой перестановкой значковъ ' $,$ ' ' $,$ ' ' $,$ ', у буквъ a, b, c . Три винта ρ', ρ'', ρ''' будутъ обладать тѣмъ свойствомъ, что ось каждого пересѣкаетъ оси двухъ другихъ

подъ прямымъ угломъ, такъ что оси $O' O'' O'''$ будуть пересѣкаться въ одной точкѣ. Эти три винта называются главными винтами группы. Если мы примемъ ихъ за основные винты α, β, γ , то $S\beta\gamma = S\gamma\alpha = S\alpha\beta = 0$.

Взявъ точку приведенія въ точкѣ пересѣченія осей α, β, γ , будемъ имѣть $O_0 = a_0\alpha + b_0\beta + c_0\gamma$, $O_1 = a_0\alpha_0 P\alpha + b_0\beta_0 P\beta + c_0\gamma_0 P\gamma$ и для PQ и перпендикуляра χ получимъ:

$$PQ = \frac{a_0^2 P\alpha + b_0^2 P\beta + c_0^2 P\gamma}{a_0^2 + b_0^2 + c_0^2},$$

$$\chi = \frac{b_0 c_0 (Py - P\beta) \alpha_0 + c_0 a_0 (Pa - P\gamma) \beta_0 + a_0 b_0 (P\beta - Pa) \gamma_0}{a_0^2 + b_0^2 + c_0^2}.$$

Изъ этихъ формулъ слѣдуетъ, что при $Pa = P\beta = P\gamma$, $PQ = Pa$ и $\chi = 0$, т. е. когда параметры главныхъ винтовъ равны, то и параметры всѣхъ винтовъ группы равны, а оси ихъ образуютъ связку.

Примѣнія формулу (13) къ рассматриваемой группѣ, мы должны положить $P\Sigma(\pm a'b''c''') = 0$, ибо числа a, b, c однозначны параметра нуль. Такимъ образомъ приходимъ въ теоремѣ.

Теорема. Сумма $PQ' + PQ'' + PQ''' + \theta_1 \operatorname{ctg}\theta_0 - \psi_1 \operatorname{tg}\psi_0$ есть величина постоянная для каждыхъ трехъ винтовъ O', O'', O''' трехчленной группы и равняется суммѣ параметровъ главныхъ винтовъ.

Отсюда слѣдуетъ:

I. Сумма параметровъ каждыхъ трехъ винтовъ, оси которыхъ пересѣкаются въ одной точкѣ, есть величина постоянная.

II. Сумма параметровъ каждыхъ трехъ винтовъ, направленія осей которыхъ взаимно перпендикулярны, есть величина постоянная.

Ибо въ обоихъ указанныхъ случаяхъ $\theta_1 \operatorname{ctg}\theta_0 - \psi_1 \operatorname{tg}\psi_0 = 0$.

Группа (3, III, 1) $O = a_0\alpha + b_0\beta + c_0\gamma$. Въ группѣ одинъ винтъ безконечно большаго параметра ($\omega\gamma$).

Группа (3, III, 2) $O = a_0\alpha + \omega b_0\beta + \omega c_0\gamma$. Въ группѣ два независимыхъ винта безконечно большаго параметра ($\omega\beta, \omega\gamma$). Оси винтовъ конечнаго параметра параллельны осямъ α . Принимая точку приведенія на оси α , получимъ для PQ и χ выражения

$$P_O = P\alpha + \frac{b_1}{a_0} \frac{S\alpha_0 \beta_0}{\alpha_0^2} + \frac{c_1}{a_0} \frac{S\alpha_0 \gamma_0}{\alpha_0^2} \quad (16)$$

$$\chi = \frac{b_1}{a_0} \frac{Va_0 \beta_0}{\alpha_0^2} + \frac{c_1}{a_0} \frac{Va_0 \gamma_0}{\alpha_0^2} \quad (17)$$

Векторы χ все лежать въ одной плоскости, опредѣляемой векторами $V\alpha_0 \beta_0$ и $V\alpha_0 \gamma_0$, перпендикулярной къ оси α . Выбирая надлежащимъ образомъ отношенія b_1/a_0 и c_1/a_0 можемъ достигнуть того, что концемъ вектора χ будетъ произвольно выбранная точка этой плоскости; черезъ каждую ея точку проходитъ, слѣдовательно, ось одного изъ винтовъ группы. Такимъ образомъ: совокупность осей винтовъ конечнаго параметра образуютъ связку параллельныхъ прямыхъ. Каждой прямой отвѣтаетъ одинъ опредѣленный параметръ.

Если исключимъ изъ равенствъ (16) и (17) отношеніе c_1/a_0 , то для χ получится линейное выражение относительно b_1/a_0 , откуда слѣдуетъ, что концы векторовъ χ , соответствующихъ одному и тому же P_O , лежать на одной прямой и, слѣдовательно, оси винтовъ одинакового параметра лежать въ параллельныхъ плоскостяхъ.

Если плоскость винтовъ безконечно большаго параметра перпендикулярна къ оси α , то $S\alpha_0 \beta_0 = S\alpha_0 \gamma_0 = 0$ и $P_O = Pa$, т. е. все винты конечнаго параметра имѣютъ параметръ одинаковый.

Группа (3, III, 3) $\rho = \omega a_0 \alpha + \omega b_0 \beta + \omega c_0 \gamma$. Въ группѣ три независимыхъ винта безконечно большаго параметра. Группу образуетъ совокупность всѣхъ винтовъ безконечно большаго параметра.

Группа (4, III, 1) $\rho = a_0 \alpha + b_0 \beta + c_0 \gamma$. Въ группу входитъ одинъ винтъ безконечно большаго параметра ($\omega \gamma$) и одна одноосная двучленная группа ($a_0 = b_0 = 0$).

Группа (4, III, 2) $\rho = a_0 \alpha + \omega b_0 \beta + c_0 \gamma$. Въ группу входятъ два независимыхъ винта безконечно большаго параметра и одна одноосная двучленная группа.

Группа (4, III, 3) $\rho = \omega a_0 \alpha + \omega b_0 \beta + c_0 \gamma$. Въ группу входятъ три независимыхъ винта безконечно большаго параметра и одна одноосная двучленная группа.

Всѣ винты безконечно большаго параметра входятъ въ группу. Легко показать, что оси винтовъ конечнаго парамет-

ра образуютъ связку параллельныхъ (оси y) прямыхъ; при чмъ каждая изъ прямыхъ связки служитъ осью безчислennаго множества винтовъ всевозможныхъ параметровъ.

Группа (5, III, 2) $\rho = a_0\alpha + b\beta + c\gamma$. Въ группѣ два независимыхъ винта безконечно большаго параметра. Въ нее входитъ группа (4, II, 2).

Группа (5, III, 3) $\rho = \omega a_0\alpha + b\beta + c\gamma$. Въ группѣ три независимыхъ винта безконечно большаго параметра. Всѣ винты безконечно большаго параметра входятъ въ группу.

Группа (6, III, 3) $\rho = a\alpha + b\beta + c\gamma$ есть совокупность всѣхъ винтовъ.

97. *Группы взаимныя*. Два винта ρ и σ называются взаимными, если ихъ относительный моментъ $S_1\rho\sigma = 0$, иначе говоря, если $S\rho\sigma$ есть вещественное число.

Теорема I. Совокупность винтовъ взаимныхъ съ винтами n -членной группы образуетъ группу b - n -членную.

Докажемъ эту теорему для двухъ частныхъ случаевъ, напр. для группъ (3, III, 1) $\rho = a_0\alpha + b_0\beta + \omega c_1\gamma$ и (3, II, 1) $\sigma = a_0\alpha + b\beta$. Такъ какъ въ первомъ случаѣ $a_1 = b_1 = c_0 = 0$, то условие взаимности винта ρ съ винтомъ σ , который опредѣляется равенствомъ [см. (95) § 81]:

$$\sigma S a \beta \gamma = x a' + y \beta' + z \gamma',$$

гдѣ $a' = V\beta\gamma$, $\beta' = V\gamma\alpha$, $\gamma' = V\alpha\beta$, будеть [см. (99) § 81]

$$a_0x_1 + b_0y_1 + c_1z_0 = 0.$$

Для взаимности винта σ , со всѣми винтами группы $\rho = a_0\alpha + b_0\beta + \omega c_1\gamma$ необходимо и достаточно, чтобы $x_1 = y_1 = z_0 = 0$ и, слѣдовательно,

$$\sigma S a \beta \gamma = x_0 a' + y_0 \beta' + \omega z_1 \gamma'.$$

Такъ какъ величины x_0, y_0, z_1 могутъ быть совершенно произвольны, то винты σ , которые взаимны со всѣми винтами группы ρ существуетъ безчислennое множество и ихъ совокупность представляетъ, очевидно, группу типа (3, III, 1), опредѣляемую предыдущимъ равенствомъ.

Совершенно также докажемъ, что совокупность винтовъ σ взаимныхъ съ винтами группы $\rho = a_0\alpha + b\beta$ образуетъ так-

же трехчленную группу, которая опредѣлится равенствомъ

$$\sigma Sa\beta y = x_0\alpha' + z\gamma'.$$

Разматривая эти примѣры, мы видимъ, что группа взаимная съ $\varrho = aa + b\beta + cy$ опредѣляется равенствомъ $\sigma Sa\beta y = xa' + y\beta' + zy'$, при чмъ, если числа a и x , b и y , c и z назовемъ соотвѣтствующими, то, когда въ группѣ $\varrho = aa + b\beta + cy$ числа a, b, c одночленны, въ группѣ взаимной $\sigma Sa\beta y = xa' + y\beta' + zy'$ соотвѣтствующія имъ числа x, y, z также одночленны и параметры каждой пары соотвѣтствующихъ чиселъ или равны нулю, или бесконечно велики. Такъ, въ первомъ примѣрѣ, $a = a_0$ и $x = x_0$, $c = \omega c_1$ и $z = \omega z_1$. Если же какое нибудь изъ чиселъ a, b, c равно нулю, или двучленно, то соотвѣтствующее ему между x, y, z двучленно, или равно нулю. Такъ, во второмъ примѣрѣ, $c = 0$ и $z = z_0 + \omega z_1$, $b = b_0 + \omega b_1$ и $y = 0$. Такимъ образомъ мы имѣемъ слѣдующую теорему:

Теорема II. Группа взаимная съ $\varrho = aa + b\beta + cy$ опредѣляется равенствомъ

$$\sigma Sa\beta y = xa' + y\beta' + zy'.$$

Если числа a, b, c одночленны, то одночленны и числа x, y, z причемъ параметры какой либо пары чиселъ или равны нулю, или бесконечно велики. Если же какое нибудь изъ чиселъ a, b, c двучленно, то соотвѣтствующее между x, y, z равно нулю; если же какое нибудь изъ чиселъ a, b, c равно нулю, соотвѣтствующее между x, y, z будетъ двучленнымъ.

Эта теорема даетъ возможность по данной группѣ, когда она приведена къ каноническому виду, тотчасъ же построить группу взаимную.

98. Группы дополнительные. Пусть имѣемъ n -членную группу $\varrho = a_1\varrho_1 + a_2\varrho_2 + \dots + a_n\varrho_n$. Взявъ какихъ нибудь два винта этой группы, $\varrho' = a'_1\varrho_1 + a'_2\varrho_2 + \dots + a'_n\varrho_n$ и $\varrho'' = a''_1\varrho_1 + a''_2\varrho_2 + \dots + a''_n\varrho_n$ и построивъ $V\varrho'\varrho''$, получаемъ винтъ

$$\tau = V\varrho'\varrho'' = (a'_1a''_2 - a''_1a'_2)V\varrho_1\varrho_2 + (a'_1a''_3 - a''_1a'_3)V\varrho_1\varrho_3 + \dots$$

Комбинируя подобнымъ же образомъ каждый винтъ группы ϱ съ каждымъ другимъ винтомъ той же группы и строя для каждой такой пары векторное произведение, мы получимъ

безчисленное множество винтовъ, которые, очевидно, принадлежать группѣ

$$\tau = b_{12} V_{Q_1 Q_2} + b_{13} V_{Q_1 Q_3} + \dots$$

Обратно, какой бы винтъ τ этой группы мы ни взяли, т. е. каковы бы ни были числа b_{12}, b_{13}, \dots всегда можно подобрать $a'_1, a'_2, \dots, a'_n; a''_1, a''_2, \dots, a''_n$ такъ, чтобы $a'_1 a'_2 - a''_1 a''_2 = b_{12}, a'_1 a'_3 - a''_1 a''_3 = b_{13}, \dots$; слѣдовательно, каждый винтъ группы τ будетъ векторнымъ произведениемъ какихъ либо двухъ винтовъ группы ρ . Группу τ назовемъ дополнительной къ группѣ ρ . Когда $V_{Q_1 Q_2} = V_{Q_1 Q_3} = \dots = 0$, будемъ говорить, что дополнительная группа исчезаетъ.

Рассмотримъ некоторые свойства дополнительной группы. Докажемъ сначала слѣдующую теорему:

Теорема I. Если каждый изъ винтовъ α, β взаименъ съ каждымъ изъ винтовъ γ, δ , то винты $V\alpha\beta$ взаименъ съ винтомъ $V\gamma\delta$.

Въ самомъ дѣлѣ, въ силу взаимности винтовъ α и β съ γ и δ , $S\alpha\gamma, S\alpha\delta, S\beta\gamma, S\beta\delta$ будутъ вещественными числами; слѣдовательно, по формулы (74) § 77 будетъ также вещественнымъ числомъ и $SV\alpha\beta V\gamma\delta$ и винты $V\alpha\beta$ и $V\gamma\delta$ будутъ взаимны. Изъ этой теоремы вытекаетъ

Теорема II. Если группы α и β взаимны, то все винты группы дополнительной къ α будутъ взаимны съ винтами группы дополнительной къ β .

Рассмотримъ сколько членовъ въ дополнительной группѣ. Основныхъ винтовъ группы τ , $V_{Q_1 Q_2}, V_{Q_1 Q_3}, \dots$, будетъ $n(n-1)/2$. Слѣдовательно дополнительная группа τ будетъ или $n(n-1)/2$ -членной, если винты $V_{Q_1 Q_2}, V_{Q_1 Q_3}, \dots$ независимы, или, если они зависимы, то будетъ содержать меньше чѣмъ $n(n-1)/2$ членовъ. Во всякомъ случаѣ число ея членовъ не можетъ быть больше $n(n-1)/2$.

Чтобы точнѣе опредѣлить типъ и число членовъ дополнительной группы въ каждомъ частномъ случаѣ, приведемъ данную группу къ ея каноническому виду $Q = a\alpha + b\beta + c\gamma$, гдѣ числа a, b, c , смотря по типу группы, могутъ быть равны нулю или быть одно-или дву-членными. Взявъ два винта группы, $Q' = a'\alpha + b'\beta + c'\gamma$ и $Q'' = a''\alpha + b''\beta + c''\gamma$, строимъ винтъ

$$\tau = (b'c'' - b''c')V\beta\gamma + (c'a'' - c''a')V\gamma\alpha + (a'b'' - a''b')V\alpha\beta \quad (18)$$

или, положивъ

$$\begin{aligned} f &= b'c'' - b''c', \quad g = c'a'' - c''a', \quad h = a'b'' - a''b', \\ \alpha' &= V\beta\gamma, \quad \beta' = V\gamma\alpha, \quad \gamma' = V\alpha\beta; \\ \tau &= fa' + g\beta' + h\gamma' \end{aligned} \quad (19)$$

Мы получимъ всѣ винты дополнительной группы, если числамъ $a', b', c', a'', b'', c''$ будемъ давать всѣ возможныя для нихъ значенія, т. е. будемъ измѣнять эти числа такъ, чтобы винты ρ' и ρ'' принадлежали къ данной группѣ, и, следовательно, a' и a'' , b' и b'' , c' и c'' были бы одинакового типа соотвѣтственно съ a, b, c . Это значитъ, что числа a' и a'' должны пребывать, оставаясь вещественными, всѣ значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$, если въ группѣ \mathcal{Q} число a одночленно параметра нуль; числа a' и a'' должны быть вида $a_1'\omega$ и $a_1''\omega$, причемъ a_1' и a_1'' должны мѣняться отъ $-\infty$ до $+\infty$, если a одночленно безконечно большаго параметра; числа a' и a'' должны быть какими угодно числами вида $a_0' + \omega a_1'$ и $a_0'' + \omega a_1''$, если число a двучленно, и наконецъ $a' = a'' = 0$, если $a = 0$. Такова же связь между числами b', b'' и b ; c', c'' и c . Такимъ образомъ формулы (18) и (19) опредѣляютъ дополнительную группу во всѣхъ случаяхъ.

Опредѣлимъ, напримѣръ, группу дополнительную къ группѣ (4, III, 1) $\mathcal{Q} = a_0\alpha + b_0\beta + c\gamma$. Въ этомъ случаѣ числа a, a', a'', b, b', b'' одночленны параметра нуль, числа же c, c', c'' двучленны; поэтому число $h = a'b'' - a''b'$ будетъ одночленнымъ, h_0 , числа же $f = b'c'' - b''c'$ и $g = c'a'' - c''a'$ двучленными и группа дополнительная будетъ $\tau = fa' + g\beta' + h_0\gamma'$, — пятичленной типа (5, III, 2). Пользуясь формулой (19), легко показать, что, вообще говоря, группа дополнительная къ одноосной исчезаетъ, къ двусосной — одноосна, къ трехъосной — трехъосна; группа дополнительная къ одночленной исчезаетъ, къ двучленной — одночленна, къ трехчленной — трехчленна, къ четырехчленной пятичленна, къ пятичленной — шестичленна.

Въ частныхъ случаяхъ число членовъ дополнительной группы можетъ быть и менѣе указанныхъ высшихъ предѣловъ.

99. *Группы замкнутыя и разомкнутыя.* Раздѣлимъ группы на два класса. Если всѣ винты группы дополнительной къ данной, принадлежать къ этой послѣдней, или исчезаютъ, то данную группу будемъ называть замкнутой. Въ тѣхъ же случаяхъ, когда это условіе невыполнено, будемъ группу на-

зывать не замкнутой, или разомкнутой. Если произведения $V_{Q_1 Q_2}, V_{Q_1 Q_3}, \dots$, каждого двух винтов Q_1, Q_2, \dots, Q_n , которые служат основными винтами группы τ , дополнительной к $Q = a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + \dots + a_n Q_n$, вся принадлежать группе Q , то и все винты группы τ принадлежать группе Q и группа Q замкнута; когда хотя одно изъ произведений $V_{Q_1 Q_2} Q, V_{Q_1 Q_3} Q, \dots$ въ составъ группы Q не входить, она разомкнута.

Опредѣлимъ типы замкнутыхъ группъ.

Такъ какъ группа τ , дополнительная одноосной группѣ, исчезаетъ, то изъ опредѣленія дополнительной группы слѣдуетъ, что все одноосные группы замкнуты.

Группа дополнительная къ двуосной $Q = aa + b\beta$ есть группа одноосная, $\tau = h\gamma'$. Винты группы τ имѣютъ осью ось γ' , винты же группы Q пересекаютъ ось γ' подъ прямымъ угломъ. Поэтому ни одинъ изъ винтовъ группы τ не можетъ принадлежать группѣ Q и двуосная группа можетъ быть замкнутой только тогда, когда $h = a'b'' - a''b = 0$, для чего должно быть $a = \omega a_1$ и $b = \omega b_1$, и $Q = \omega a_1 a + \omega b_1 \beta$. Итакъ изъ двуосныхъ группъ замкнута только двучленная группа винтовъ безконечно большаго параметра.

Чтобы опредѣлить, какія изъ трехъосныхъ группъ замкнуты, разсмотримъ послѣдовательно группы трехчленные, четырехчленные и пятичленные.

Группа (3, III, 0). Дополнительная группа $\tau = f_0 \alpha' + g_0 \beta' + h_0 \gamma'$. Если за основные винты α, β, γ группы Q взяты главные винты этой группы, то основные винты дополнительной группы, α', β', γ' , будуть имѣть своими осами оси α, β, γ и параметрами суммы $P\beta + Py, Py + Pa, Pa + P\beta$ соответственно. Поэтому, чтобы группа Q могла быть замкнута, необходимо существование равенствъ $P\beta + Py = Pa, Py + Pa = P\beta, Pa + P\beta = Py$, изъ которыхъ слѣдуетъ $Pa = P\beta = Py = 0$. Соблюдение этого условія вполнѣ достаточно, ибо когда параметры главныхъ винтовъ равны нулю, то параметры и всѣхъ винтовъ группы равны нулю, и оси ихъ образуютъ связку. Въ такомъ случаѣ очевидно, что группа τ винтовъ дополнительныхъ къ Q будетъ тождественна съ этой послѣдней; слѣдовательно группа Q будетъ замкнута.

Группа (3, III, 1) не можетъ быть замкнутой. Въ самомъ дѣлѣ, группа дополнительная имѣть видъ $\tau = \omega f_1 \alpha' + \omega g_1 \beta' + h_1 \gamma'$. Она содержитъ два независимыхъ винта безконечно большаго параметра, въ группу же Q входитъ только

одинъ такой винтъ. Слѣдовательно не всѣ винты группы τ принадлежать σ и группа σ разомкнута.

Группа (3, III, 2). Группой дополнительной служить дву-членная группа $\tau = \omega g, \beta' + \omega h, \gamma'$ винтовъ безконечно большаго параметра, оси которыхъ параллельны плоскости, опре-дѣляемой векторами $V_{\gamma_0} \alpha_0$ и $V_{\alpha_0} \beta_0$, перпендикулярной оси α . Группы σ также принадлежитъ дву-членная группа винтовъ безконечно большаго параметра ($a_0 = 0$), оси которыхъ парал-лельные плоскости (β_0, γ_0). Поэтому, чтобы всѣ винты группы τ принадлежали группѣ σ плоскость (β_0, γ_0) и оси β, γ должны быть перпендикулярны оси α . Итакъ группа будетъ замкну-той только тогда, когда всѣ винты конечнаго параметра, оси которыхъ образуютъ связку параллельныхъ прямыхъ, имѣютъ одинаковый параметръ.

Группа (3, III, 3). Дополнительная группа исчезаетъ, $\tau = 0$. Группа σ замкнута.

Группы четырехчленные. Желая построить группу до-полнительную къ четырехчленной, должны числа a', a'', b', b'' счи-тать одночленными, а числа c' и c'' дву-членными.

Группа (4, III, 1) разомкнута, ибо группа дополнитель-ная къ ней, $\tau = f\alpha' + g\beta' + h_0\gamma'$, пятичленна.

Группа (4, III, 2). Группа дополнительная, $\tau = \omega f, \alpha' + g\beta' + \omega h, \gamma'$, четырехчленна и содержить три независимыхъ винта безконечно большаго параметра; въ группу же σ та-кихъ винта входитъ только два : группа σ разомкнута.

Группа (4, III, 3). Дополнительной группой служить дву-членная, $\tau = \omega f, \alpha' + \omega g, \beta'$, винтовъ безконечно большаго па-раметра. Такъ какъ всѣ винты безконечно большаго параметра входятъ въ группу σ , то группа σ замкнута.

Группы пятичленные. Для пятичленныхъ группъ числа b', b'', c', c'' дву-членны, а числа a', a'' одночленны.

Группа (5, III, 2) не можетъ быть замкнутой, ибо группа къ ней дополнительная, $\tau = f\alpha' + g\beta' + h\gamma'$, шестичленна.

Группа (5, III, 3). Группа дополнительная имѣеть видъ $\tau = f\alpha' + \omega g, \beta' + \omega h, \gamma'$. Оси всѣхъ ея винтовъ конечнаго па-раметра параллельны оси α' ; между тѣмъ оси винтовъ конеч-наго параметра группы σ параллельны плоскости (β_0, γ_0) и, слѣдовательно, перпендикулярны оси α' . Группа σ разомкнута.

Группа шестичленная. Эта группа замкнута, такъ какъ она представляетъ совокупность всѣхъ винтовъ.

Результаты предыдущих изслѣдований мы резюмируемъ слѣдующей таблицей, на лѣвой сторонѣ которой перечислены всѣ типы замкнутыхъ группъ, а на правой приведены группы съ ними взаимныя. Послѣднія получены по правиламъ § 97.

Группы замкнутыя.

Одночленныя.

Всѣ одночленныя группы замкнуты.

Двучленныя.

1. (2, I, 1) Одноосная группа $\rho = ax$. Сокупность винтовъ, которые имѣютъ общую ось съ α .

2. (2, II, 2). Группа $\rho = \omega_a \alpha + \omega_b \beta$ винтовъ безконечно большого параметра.

Трехчленныя.

1. (3, III, 0). Группа $\rho = a_0 \alpha + b_0 \beta + c_0 \gamma$, при чмѣ оси винтовъ образуютъ связку и параметры ихъ равны нулю.

2 (3, III, 2). Группа $\rho = a_0 \alpha + \omega_b \beta + \omega_c \gamma$ причемъ оси β и γ перпендикулярны къ оси α . Группа состоитъ изъ винтовъ безисинечно большого параметра, оси которыхъ перпендикулярны оси α и, винтовъ одинакового параметра P_α , оси которыхъ образуютъ связку прямыхъ параллельныхъ оси α .

3. (3, III, 3). Группа $\rho = \omega(a_0 \alpha + b_0 \beta + c_0 \gamma)$ винтовъ безконечно большого параметра.

Четырехчленныя.

1. (4, III, 3). Группа $\rho = \omega_a \alpha + \omega_b \beta + \omega_c \gamma$ съ тремя независимыми винтами безконечно большого параметра.

Шестичленная.

1. Шестичленная группа.

100. Задача: построить замкнутую группу, исходя отъ двухъ, или трехъ, данныхъ винтовъ. Пусть намъ даны два винта Q_1 и Q_2 , которые опредѣляютъ двучленную группу. Группа дополнительная къ ней состоить изъ одного винта $Q_3 = V_{Q_1 Q_2}$. Если $Q_3 = 0$, то винты Q_1, Q_2, Q_3 будутъ независимы и будутъ опредѣлять трехчленную группу $Q = a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + a_3 Q_3$, которая можетъ быть замкнутой, или разомкнутой. Въ первомъ случаѣ, какую бы пару винтовъ Q', Q'' группы мы ни взяли,

Группы съ ними взаимныя.

Пятичленная.

Пятичленные всѣхъ типовъ.

Четырехчленная.

1. (4, II, 2). Двухосная группа $\sigma \alpha \beta \gamma = y' + z\gamma'$. Сокупность винтовъ, оси которыхъ образуютъ щетку съ осью α .

2. (4, III, 3). Группа $\rho \alpha \beta \gamma = \omega_a \alpha' + \omega_y \beta' + z\gamma'$ съ тремя независимыми винтами безконечно большого параметра.

Трехчленная.

1. -(3, III, 0). Группа $\sigma \alpha \beta \gamma = x_0 \alpha' + y_0 \beta' + z_0 \gamma'$ тождественная съ взаимной съ ней группой ρ .

2. (3, III, 2). Группа $\sigma \alpha \beta \gamma = x_0 \alpha' + \omega_y \beta' + \omega_z \gamma'$. Группа состоитъ изъ винтовъ безконечно большого параметра, оси которыхъ перпендикулярны оси α , и винтовъ параметра $-P_\alpha$, оси которыхъ образуютъ связку прямыхъ параллельныхъ оси α .

3. (3, III, 3). Группа $\sigma \alpha \beta \gamma = \omega(x_0 \alpha' + y_0 \beta' + z_0 \gamma')$ винтовъ безконечно большого параметра.

Двучленная.

1. (2, II, 2). Группа $\sigma \alpha \beta \gamma = \omega(x_0 \alpha' + y_0 \beta')$ винтовъ безконечно большого параметра.

Исчезающая.

строя $VQ'Q''$, не получимъ новыхъ винтовъ. Во второмъ навѣрное есть въ группѣ хотя одна пара винтовъ Q'_1, Q''_1 , для которыхъ винтъ $Q_4 = VQ'Q''$ не принадлежитъ группѣ, такъ что четыре винта Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 будутъ независимы и опредѣлять четырехчленную группу $Q = a_1Q_1 + a_2Q_2 + a_3Q_3 + a_4Q_4$. Если эта группа замкнутая, то векторная произведенія ея винтовъ не дадутъ намъ новыхъ винтовъ. Если же она разомкнута, то въ ней найдемъ такихъ два винта Q' и Q'' , что $Q_5 = VQ'Q''$ не будетъ принадлежать группѣ, и независимые винты Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 опредѣлять пятичленную группу. Пятичленные группы разомкнуты, а потому навѣрное въ группѣ найдемъ два винта Q'_1, Q''_1 для которыхъ $Q_6 = VQ'Q''$ не будетъ принадлежать группѣ. Винты Q_1, \dots, Q_6 будутъ независимы и опредѣлять шестичленную группу.

Такимъ образомъ, исходя отъ двухъ винтовъ Q_1 и Q_2 , или какихъ нибудь другихъ двухъ винтовъ двучленной группы, ими опредѣляемой, и поступая такъ, какъ только что было указано, непремѣнно придемъ или къ шестичленной, или къ какой нибудь другой замкнутой группѣ. Спрашивается, каждая ли замкнутая группа можетъ быть получена указаннымъ способомъ и каковы должны быть винты Q_1 и Q_2 , или, лучше, двучленная группа ими опредѣляемая, чтобы прийти къ той, или другой замкнутой группѣ? Для рѣшенія этого вопроса дѣлаемъ всѣ возможныя относительныя группы $Q = a_1Q_1 + a_2Q_2$ предположенія и рассматриваемъ къ какой замкнутой группѣ мы приходимъ въ каждомъ частномъ случаѣ. Такъ какъ эти изслѣдованія прости, то мы не будемъ входить въ подробности и приведемъ только результаты.

A. 1. Винты Q_1 и Q_2 имѣютъ безконечно большой параметръ и опредѣляютъ двучленную группу винтовъ безконечно большаго параметра. Какую бы пару винтовъ Q' и Q'' этой группы ни взяли, $VQ'Q'' = 0$ и мы не получимъ новыхъ винтовъ.

2. Если данные винты Q_1 и Q_2 имѣютъ общую ось, или параметръ одного изъ нихъ безконечно велика и оси параллельны, то они опредѣляютъ одноосную группу $Q = a\alpha$. И въ этомъ случаѣ $VQ'Q'' = 0$ для какихъ либо двухъ винтовъ группы $= 0$.

B. Если винты Q_1 и Q_2 имѣютъ конечный параметръ, но оси ихъ параллельны, или, если параметръ одного изъ

нихъ бесконечно велики, но оси не параллельны, то они опредѣляютъ двучленную группу типа (2, II, 1) $\rho = a_0\alpha + \omega b_1\beta$. Эта группа даетъ различные результаты, смотря по тому, будеть ли ось α перпендикулярна къ оси β , или нетъ.

1. Когда $a_0 \perp b_0$, приходимъ къ замкнутой группѣ типа (3, III, 2) $\rho = a_0\alpha + \omega b_1\beta + \omega c_1\gamma$, причемъ $a_0 \perp \gamma_0$, таъ что всѣ винты конечнаго параметра имѣютъ одинаковый параметръ.

2. Когда оси α и β не перпендикулярны, приходимъ къ замкнутой четырехчленной группѣ (4, III, 3) $\rho = a\alpha + \omega b_1\beta + \omega c_1\gamma$ съ тремя независимыми винтами бесконечно большаго параметра.

C. Если оси винтовъ ρ_1 и ρ_2 не параллельны и параметры ихъ не бесконечно велики, то они опредѣляютъ группу типа (2, II, 0) $\rho = a_0\alpha + b_0\beta$. При этомъ можетъ быть два случая.

1. Когда $P\rho_1 = P\rho_2 = 0$ и оси ρ_1 и ρ_2 пересѣкаются, то вышеуказанными построеніями приходимъ къ замкнутой группѣ типа (3, III, 0) $\rho = a_0\alpha + b_0\beta + c_0\gamma$ винтовъ параметра нуль.

2. Въ другихъ случаяхъ приходимъ къ шестичленной группѣ.

Такимъ образомъ всѣ замкнутыя группы, кроме трехчленной группы винтовъ бесконечно большаго параметра могутъ быть получены вышеуказанныхъ путемъ, исходя отъ винтовъ двучленной группы.

Если мы, поступая подобно предыдущему, начнемъ построенія съ винтовъ трехчленной группы, то можетъ представиться три случая.

1. Данная трехчленная группа замкнута. Тогда векторное произведение какихъ либо двухъ винтовъ группы снова принадлежитъ группѣ.

2. Если данная группа принадлежитъ къ типу (3, III, 2) $\rho = a_0\alpha + \omega b_1\beta + \omega c_1\gamma$, при чемъ оси β и γ не перпендикулярны къ оси α , то приходимъ замкнутой четырехчленной группѣ (4, III, 3) $\rho = a\alpha + \omega b_1\beta + \omega c_1\gamma$ съ тремя независимыми винтами бесконечно большаго параметра.

3. Въ остальныхъ случаяхъ получаемъ шестичленную группу.

101. Замкнутыя группы винтовъ и группы движений.
Такъ какъ всякий винтъ опредѣляетъ ∞^1 движений неизмѣ-

иаемой системы, а именно движений, которые получаются, если, связав систему с гайкой винта будем поворачивать гайку на все возможные углы от $-\infty$ до $+\infty$, то n -членная группа ∞^{n-1} винтов определят ∞^n движений. Эта совокупность движений называется группой, если два последовательных движения совокупности, слагаясь, будут эквивалентны одному движению той же совокупности. Въ противномъ случаѣ совокупность движений группы не образуетъ. Мы покажемъ теперь, что только замкнутыя группы винтовъ определяютъ группы движений. Съ этою цѣлью обратимся къ рѣшенію слѣдующей задачи.

Имѣемъ два винта α и β съ соответствующими имъ гайками и нѣкоторую неизмѣняемую систему, занимающую положеніе P_0 . Сообщимъ гайкамъ послѣдовательныя безконечно малыя перемѣщенія въ такомъ порядке: 1) перемѣстимъ первую гайку винта α , 2) перемѣстимъ вторую гайку винта β , 3) вернемъ первую гайку въ ея первоначальное положеніе и 4) вернемъ вторую гайку въ ея первоначальное положеніе, и представимъ себѣ, что неизмѣняемая система связана поочередно то съ первой, то со второй гайкой, всякий разъ съ той изъ нихъ, которой мы сообщаемъ перемѣщеніе, сначала съ первой, потомъ со второй, затѣмъ снова съ первой и снова съ второй. Неизмѣняемая система получитъ такимъ образомъ четыре перемѣщенія: первая гайка переведетъ ее изъ положенія P_0 въ (1), вторая изъ (1) во (2), затѣмъ снова первая изъ (2) въ (3) и наконецъ вторая изъ (3) въ P_1 . Въ результатѣ этихъ перемѣщеній гайки придутъ въ ихъ первоначальное положеніе, а неизмѣняемая система придетъ изъ положенія P_0 въ безконечно близкое положеніе P_1 , которое, вообще говоря, будетъ отлично отъ положенія P_0 . Но мы можемъ перевести неизмѣняемую систему изъ P_0 въ P_1 сразу, однимъ винтовымъ движениемъ. Постараемся определить винтъ, это движение опредѣляющій. Мы достигнемъ этого, если вайдемъ безконечно малыя приращенія, которые получаются координаты какой либо точки M неизмѣняемой системы при переходѣ ея изъ положенія P_0 въ P_1 черезъ положенія (1), (2), (3), и съ этою цѣлью зададимся вопросомъ болѣе общимъ, определить приращеніе, получаемое какой либо функцией отъ координатъ этой точки, при сказанныхъ перемѣщеніяхъ. Означимъ черезъ x, y, z координаты точки M безъ значковъ въ ея положеніи P_0 .

со значениями 1,2,3,4 въ положеніяхъ (1), (2), (3) и P_1 , и пусть (x,y,z) какая нибудь функція. Означимъ черезъ p,q,r,a,b,c ; p_1,q_1,r_1,a_1,b_1,c_1 координаты бивекторовъ α и β . При равнотріномъ движениі первой гайки координаты точки M и ихъ функція f становятся функціями времени; и легко видѣть, что первой производной отъ $f(x,y,z)$ по времени будетъ

$$Xf = (a + qz - ry) \frac{\partial f}{\partial x} + (b + rx - pz) \frac{\partial f}{\partial y} + (c + py - qx) \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Второй производной отъ $f(x,y,z)$ будетъ XXf , третьей $XXXf$ и т. д.. Поэтому, если τ есть безконечно малый промежутокъ времени, въ теченіи которого происходитъ движение первой гайки, то

$$f_1 = f + \tau Xf + \frac{1}{2} \tau^2 XXf + \dots, \quad (20)$$

гдѣ $f_1 = f(x_1, y_1, z_1)$. Означивъ черезъ $X_1 f$ выраженіе, въ которое переходитъ Xf , если при буквахъ p,q,r,a,b,c поставимъ значекъ 1, черезъ τ_1 — безконечно малый промежутокъ времени движенія второй гайки, черезъ $f_1 = f(x_1, y_1, z_1)$, найдемъ, что

$$f_1 = f_1 + \tau_1 X_1 f_1 + \frac{1}{2} \tau_1^2 X_1 X_1 f_1 + \dots,$$

или, замѣнивъ по формулѣ (20) $X_1 f$ черезъ $X_1 f + \tau X X_1 f + \dots$, $X_1 X_1 f$ — черезъ $X_1 X_1 f + \dots$,

$$f_1 = f + (\tau X + \tau_1 X_1) f + \frac{1}{2} (\tau^2 X X + 2\tau\tau_1 X_1 X + \tau_1^2 X_1 X_1) f + \dots, \quad (21)$$

Далѣе, значеніе функціи $f(x,y,z)$, когда первая гайка вернется въ первоначальное положеніе, $f(x_3, y_3, z_3) = f_3$, будетъ

$$f_3 = f_1 - \tau X_1 f_1 + \frac{1}{2} \tau^2 XX_1 f_1 - \dots,$$

но по формулѣ (21) $X_1 f_1 = Xf + (\tau X + \tau_1 X_1) Xf + \dots$, $XX_1 f_1 = XXf + \dots$, слѣдовательно

$$f_3 = f + \tau_1 X_1 f + \tau\tau_1 (X_1 X - XX_1) f + \frac{1}{2} \tau_1^2 X_1 X_1 f + \dots$$

Наконецъ, когда вторая гайка вернется въ свое первоначальное положение, $f(x,y,z)$ обратится въ

$$f_4 = f_3 - \tau_1 X_1 f_3 + \frac{1}{2} \tau_1^2 X_1 X_1 f_3 - \dots,$$

или, замѣняя f_3 его выражениемъ по предыдущей формулы и ограничиваясь членами втораго порядка,

$$f_4 = f + \tau \tau_1 (X_1 X - X X_1) f = f + \tau \tau_1 (X_1 X) f,$$

$$\text{гдѣ } (X_1 X) f = (A + Qz - Ry) \frac{\partial f}{\partial x} + (B + Rx - Pz) \frac{\partial f}{\partial y} + (C + Py - Qx) \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (22)$$

и P, Q, R, A, B, C опредѣляются формулами (8) § 14. Чтобы опредѣлить теперь приращенія, получаемыя координатами точки M при переходѣ изъ положенія P_0 въ P , нужно только положить $f(x,y,z)$ по порядку $= x$, потомъ $= y$, и наконецъ $= z$; тогда получимъ формулы

$$\begin{aligned} x_4 - x &= \delta x = (A + Qz - Ry)r, \\ y_4 - y &= \delta y = (B + Rx - Pz)\eta, \\ z_4 - z &= \delta z = (C + Py - Qx)\eta, \end{aligned}$$

гдѣ $\eta = \tau \tau_1$, изъ которыхъ вытекаетъ

Теорема I. Винтъ, опредѣляющій перемѣщеніе изъ P_0 въ P_1 , есть векторное произведение винтовъ α и β , $V\alpha\beta$.

Допустимъ, что α и β два винта нѣкоторой группы винтовъ \mathcal{Q} , которая опредѣляетъ группу движений; тогда всѣ движения: переводящее систему изъ положенія P_0 въ (1), изъ (2) въ (3), изъ (3) въ P_1 , а слѣдовательно и движение, которое переводитъ систему изъ P_0 въ P_1 и опредѣляется винтомъ $V\alpha\beta$, должно принадлежать группѣ движений. Поэтому винтъ $V\alpha\beta$ долженъ входить въ составъ группы \mathcal{Q} , а такъ какъ α и β могутъ быть какими угодно винтами группы \mathcal{Q} , то векторное произведение двухъ произвольно взятыхъ винтовъ

группы \mathcal{Q} должно принадлежать группѣ \mathcal{Q} , и группа \mathcal{Q} должна быть замкнутой. Такимъ образомъ замкнутость группы винтовъ является условиемъ необходимымъ для того, чтобы она могла опредѣлять группу движений. Это условие вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточно. Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая замкнутыя группы, перечисленныя въ § 99, легко видѣть, что движения, которыя опредѣляются винтами какой нибудь изъ нихъ, слагаясь, всегда даютъ движение, опредѣляемое однимъ изъ винтовъ той же группы. Итакъ мы имѣемъ теорему:

Теорема II. Толькo замкнутыя группы винтовъ опредѣляютъ группы движений. Движения же, опредѣляемыя разомкнутой группой винтовъ, группы не образуютъ.

Сдѣлаемъ еще замѣчаніе по поводу формулы (22). Скобки $(X, X)f$, составленныя изъ двухъ выражений Xf и X,f , отвѣчающихъ бивекторамъ α и β , представляютъ выраженіе подобное Xf и X,f , отвѣчающее бивектору $V\alpha\beta$. Поэтому, если мы означимъ черезъ X,f результатъ замѣнъ въ X,f значковъ 1 у буквъ p, q, r, a, b, c значками 2, черезъ γ бивекторъ съ координатами $p_2, q_2, r_2, a_2, b_2, c_2$, то выраженіе $(X, (XX))f$ будетъ подобно Xf , X,f и X,f и будетъ соотвѣтствовать бивектору $V\gamma V\alpha\beta$, и тожество Jacobi:

$$(X(X, X)) + (X, (X, X)) + (X, (XX)) = 0$$

будетъ эквивалентно тожеству

$$V\alpha V\beta\gamma + V\beta V\gamma\alpha + V\gamma V\alpha\beta = 0,$$

которое мы рассматривали въ § 90. Такимъ образомъ теорема, формулированная нами въ концѣ § 90 есть геометрическое толкованіе тожества Jacobi для указанного частнаго вида выражений Xf , X,f , X,f .

Г л а в а III.

102. *Определенія.* Лагранжъ въ своемъ классическомъ трактатѣ *Mécanique Analytique* ясно формулировать условія, которымъ должны удовлетворять связи системы материальныхъ точекъ, чтобы имѣть мѣсто законъ движения центра тяжести,

или момента количества движений. Центр тяжести системы будетъ двигаться въ иѣкоторомъ направлениіи какъ материальная точка, къ которой приложены всѣ силы системы и въ которой сосредоточена вся масса системы, если связи позволяютъ сообщить системѣ во всякомъ ея положеніи поступательное перемѣщеніе по этому направлению. Для того, чтобы имѣть мѣсто законъ моментовъ количества движений относительно какой нибудь оси, нужно, чтобы систему точекъ во всякомъ ея положеніи можно было повернуть вокругъ этой оси. Итакъ Лагранжъ предполагаетъ, что можно, не измѣняя относительного расположения точекъ системы, сообщить ей въ первомъ случаѣ поступательное перемѣщеніе, во второмъ—вращательное. Но оба эти перемѣщенія представляютъ лишь частный случай самого общаго, на которое способно твердое тѣло,—перемѣщенія винтового, а потому весьма естественно задающіеся вопросомъ, что дастъ намъ принципъ D'Alembert'a въ соединеніи съ принципомъ возможныхъ перемѣщеній, если связи позволяютъ сообщить системѣ во всякомъ ея положеніи винтовое перемѣщеніе. Этотъ вопросъ приводитъ насъ къ винтовымъ интеграламъ, свойства которыхъ, какъ увидимъ, тѣсно связаны съ результатами предыдущей главы. На существование винтовыхъ интеграловъ было указано впервые г. Cerruti („Nuova theorema generale di meccanica“. Atti della R. Acad. dei Lincei (3), II; „Intorno ad una generalizzazione ad alcun i theoremi di meccanica“, Collectanea math. in mem. G. Chelini). Моя изслѣдованія, относящіяся къ винтовымъ интеграламъ, которые составляютъ содержаніе этой главы, служили предметомъ двухъ сообщеній (Изв. Каз. Ф. М. Общ. (2), IV, протоколъ 35 зас.; Дневникъ IX съѣзда Р. Ест. и Бр., №=6) и замѣтки, помѣщенной въ Comptes Rendus (C.R. 1894, CXVIII, р. 129).

Условимся предварительно въ иѣкоторыхъ терминахъ.

I. Если связи системы таковы, что можемъ, не измѣняя относительного расположения точекъ, сообщить всей системѣ, во всякомъ ея положеніи, иѣкоторое винтовое перемѣщеніе, то будемъ говорить, что для системы возможенъ кинематический винтъ. Бивекторъ и винтъ, опредѣляющіе возможное винтовое перемѣщеніе, будемъ называть возможными. Группу винтовъ будемъ называть возможной, если всѣ винты группы возможны.

II. Сложимъ всѣ силы, приложенные къ точкамъ системы по правилу Poinsot, т. е. такъ, какъ если бы онъ дѣйствовали на твердое тѣло. Мы получимъ одну силу и одну пару. Бивекторъ, характеризующій эту совокупность назовемъ бивекторомъ силъ, а винтъ, на которомъ онъ лежитъ силовымъ винтомъ.

III. Изобразимъ количество движенія каждой точки системы векторомъ и сложимъ всѣ векторы такъ, какъ если бы они изображали собой силы, приложенные къ точкамъ твердаго тѣла,—получимъ главный векторъ и пару. Бивекторъ, характеризующій эту систему, назовемъ бивекторомъ количествъ движения, а винтъ, на которомъ онъ лежитъ, винтомъ количествъ движения.

103. Возможные винты. Голономныя системы. Пусть имѣемъ систему, состоящую изъ n точекъ (x_i, y_i, z_i) ($i = 1, 2, \dots, n$), возможные перемѣщенія которыхъ, $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$, связаны между собой s уравненіями

$$\sum_i (A_{ki} \delta x_i + B_{ki} \delta y_i + C_{ki} \delta z_i) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, s \quad (1)$$

гдѣ A_{ki}, B_{ki}, C_{ki} суть нѣкоторыя функции отъ координатъ точекъ системы и могутъ зависѣть также отъ времени. Систему точекъ будемъ называть голономной *), если система ур. (1), рассматриваемая какъ система ур. въ полныхъ дифференциалахъ, интегрируема и стало быть эквивалентна s конечнымъ уравненіямъ вида

$$f_k = C_k, \quad k = 1, 2, \dots, s \quad (2)$$

гдѣ f_k суть нѣкоторыя функции отъ координатъ точекъ (и времени) и C_k постоянныя, и неголономными—въ противномъ случаѣ. Для голономныхъ системъ функции f_k будемъ называть функциями связей.

Если для системы возможенъ кинематическій винтъ α , $(p_1, q_1, r_1, a_1, b_1, c_1)$, то мы можемъ точкамъ системы, въ каждомъ положеніи ея, занять которое допускаютъ связи, сообщить безконечно малыя перемѣщенія $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$, опредѣляемыя формулами

$$\begin{aligned} \delta x_i &= (a_1 + q_1 z_i - r_1 y_i) \varepsilon, \\ \delta y_i &= (b_1 + r_1 x_i - p_1 z_i) \varepsilon, \\ \delta z_i &= (c_1 + p_1 y_i - q_1 x_i) \varepsilon, \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

* Терминъ заимствованъ у Hertz'a, Mechanik, p. 91.

гдѣ ε есть величина бесконечно малая одинаковая для всѣхъ точекъ системы. Эти перемѣщенія, какъ перемѣщенія возможны, должны удовлетворять ур. (1), и потому для всѣхъ положеній, занятъ которыя позволяютъ связи,

$$a_1 \sum_i A_{ki} + b_1 \sum_i B_{ki} + c_1 \sum_i C_{ki} + p_1 \sum_i (y_i C_{ki} - z_i B_{ki}) + q_1 \sum_i (\varepsilon_i A_{ki} - x_i C_{ki}) + r_1 \sum_i (x_i B_{ki} - y_i A_{ki}) = 0. \quad k = 1, 2, \dots, s \quad (4)$$

Таковы необходимы и достаточны условія для того, чтобы винт α_1 былъ возможенъ. Благодаря линейному и однородному виду послѣднихъ ур. относительно координатъ винта α_1 , легко показать, что винтъ $e_1 \alpha_1 + e_2 \alpha_2 + \dots$, гдѣ e_1, e_2, \dots суть нѣкоторыя вещественные числа, будетъ возможнымъ, если винты $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ возможны. Такимъ образомъ мы имѣемъ теорему:

Теорема I. Если винты $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ возможны, то возможна и группа, ими определяемая.

Отсюда слѣдуетъ, что совокупность всѣхъ возможныхъ для данныхъ связей винтовъ образуетъ непремѣнно группу винтовъ.

Предыдущая теорема справедлива будеть ли система голономной или нѣть. Напротивъ, слѣдующія теоремы, которыхъ мы докажемъ въ этомъ параграфѣ, имѣютъ мѣсто только въ томъ случаѣ, когда связи могутъ быть выражены ур. (2), и, слѣдовательно, система голономна. Рассмотримъ, какъ въ этомъ случаѣ выражаются условія возможности винта α_1 . Теперь ур. (1) мы можемъ замѣнить имъ эквивалентными ур.

$$\sum (\frac{\partial f_k}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_k}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_k}{\partial z} \delta z) = 0,$$

а ур. (4) замѣняются системой ур., которыхъ будуть выражать, что каждая изъ функций f_k связей удовлетворяетъ ур.

$$X_1 f = 0,$$

гдѣ

$$X_1 f = a_1 \sum \frac{\partial f}{\partial x} + b_1 \sum \frac{\partial f}{\partial y} + c_1 \sum \frac{\partial f}{\partial z} + p_1 \sum (y \frac{\partial f}{\partial z} - z \frac{\partial f}{\partial y}) + q_1 \sum (\varepsilon \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial z}) + r_1 \sum (x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x}). \quad (5)$$

Такимъ образомъ, для того, чтобы винтъ α_1 былъ возможенъ, необходимо и достаточно, чтобы всѣ функции связей въ каждомъ положеніи системы удовлетворяли предыдущему ур.. Такъ какъ для точекъ системы возможны только такія положенія, которыхъ допускаютъ связи, то нѣтъ необходимости, чтобы функции f_k удовлетворяли ур. $X_1 f = 0$ тожественно, вполнѣ достаточно, если онѣ будутъ удовлетворять ему въ силу соотношенія $f_k = C_k$.

Допустимъ теперь, что кромѣ возможнаго винта α_1 , существуетъ еще возможный винтъ $\alpha_2(p_2, q_2, r_2, a_2, b_2, c_2)$, такъ что функции связей удовлетворяютъ не только ур. $X_1 f = 0$, но и ур. $X_2 f = 0$, гдѣ $X_2 f$ получается изъ $X_1 f$ замѣной у буквъ p, q, r, a, b, c значкомъ 2. Функции связей, удовлетворяя въ силу какихъ либо соотношеній между перемѣнными двумъ ур. $X_1 f = 0$ и $X_2 f = 0$, на основаніи известной теоремы, будутъ удовлетворять въ силу тѣхъ же соотношеній и ур. $X_1 X_2 f - X_2 X_1 f = (X_2 X_1) f = 0$. Но вычисляя $(X_2 X_1) f$, мы получаемъ для него выраженіе, которое отличается отъ $X_1 f$ только тѣмъ, что въ немъ вместо $p_1, q_1, r_1, a_1, b_1, c_1$ стоятъ соответственно координаты P, Q, R, A, B, C бивектора $V\alpha_1 \alpha_2$, а потому изъ ур. $(X_2 X_1) f_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, s$) будетъ слѣдоватъ, что винтъ $V\alpha_1 \alpha_2$ также возможенъ. Итакъ имѣемъ теорему:

Теорема II. Если для голономной системы винты α_1 и α_2 возможны, то возможенъ и винтъ $V\alpha_1 \alpha_2$.

Изъ теоремъ I и II вытекаетъ слѣдующая.

Теорема III. Совокупность всѣхъ возможныхъ винтовъ образуетъ для голономной системы замкнутую группу.

Предположимъ, что система голономна, и пусть Γ есть группа всѣхъ возможныхъ винтовъ, такъ что нѣть ни одного возможнаго винта, который не принадлежалъ бы группѣ Γ . Группа Γ будетъ замкнутой (§ 99). Въ самомъ дѣлѣ, если она не замкнута, то мы могли бы найти такихъ два винта группы, α' и α'' , что $V\alpha' \alpha''$ къ группѣ не принадлежитъ. Этотъ винтъ по теоремѣ II будетъ возможнымъ, такъ что будемъ имѣть новый возможный винтъ, не принадлежащий группѣ, Γ , что противорѣчить предположенію, что всѣ возможные винты входятъ въ группу Γ .

Такимъ образомъ между голономными и неголономными системами есть существенная разница. Тогда какъ, какую бы группу винтовъ Γ мы ни взяли, всегда можемъ построить

неголономную систему, для которой эта группа была бы возможной, группа Γ должна быть необходимо замкнутой, чтобы она могла быть совокупностью всѣхъ возможныхъ для голономной системы винтовъ. Докажемъ, что это условіе не только необходимо но и достаточно.

Теорема IV. *Существуютъ голономные системы, для которыхъ данная s -членная замкнутая группа Γ будетъ совокупностью всѣхъ возможныхъ винтовъ.*

Примемъ какіе нибудь s независимыхъ винтовъ $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ группы Γ за основные винты. По теоремѣ I группа Γ будетъ возможной, если винты $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ возможны, для чего, въ свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы функции связей f_k удовлетворяли ур.

$$X_k f = 0, \quad k = 1, 2, \dots, s \quad (6)$$

гдѣ $X_k f$ получается изъ $X_i f$ (5) замѣтной у буквъ p, q, r, a, b, c значка 1 значкомъ k , и величины $p_k, q_k, r_k, a_k, b_k, c_k$ суть координаты винта α_k . Нужно, слѣдовательно, доказать, что система диф. ур. (6) допускаетъ рѣшеніе.

Въ выраженіи $(X_i X_j)_f$ величины P, Q, R, A, B, C суть координаты винта $V\alpha_1 \alpha_2$. Такъ какъ, по предположенію, группа Γ замкнута, то $V\alpha_1 \alpha_2$ принадлежитъ группѣ: $V\alpha_1 \alpha_2 = e_1 \alpha_1 + e_2 \alpha_2 + \dots + e_s \alpha_s$, гдѣ e_1, e_2, \dots, e_s нѣкоторыя вещественные числа, и

$$\begin{aligned} P &= e_1 p_1 + e_2 p_2 + \dots + e_s p_s, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ A &= e_1 a_1 + e_2 a_2 + \dots + e_s a_s, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Отсюда имѣемъ $(X_i X_j)_f = e_1 X_1 f + \dots + e_s X_s f$. Также докажемъ, что и всѣ выраженія $(X_i X_k)_f$ ($i, k = 1, 2, \dots, s$) суть линейные функции отъ $X_k f$. Такимъ образомъ система ур. (6) есть система полная и функции, удовлетворяющія ей, существуютъ.

Замѣтимъ при этомъ, что вслѣдствіе независимости винтовъ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ выраженія $X_i f, X_j f, \dots, X_s f$ между собой также независимы, таѣъ что система ур. (6) есть полная система, состоящая изъ s независимыхъ ур.. Поэтому существуетъ $3n - s$ независимыхъ между собой функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{3n-s}$, удовлетворяющихъ ур. (6), и ихъ общимъ интеграломъ будетъ

произвольная функция отъ φ . Функции связей будутъ функциями отъ φ .

Припоминая зависимость между замкнутыми группами винтовъ и группами движений, можемъ теоремы III и IV формулировать такимъ образомъ:

Теорема V. Суммарность винтовыхъ движений, возможныхъ для голономной системы, образуютъ группу движений. Обратно, каждая группа движений возможна для некоторой голономной системы.

104. Связи для замкнутыхъ возможныхъ группъ. Рассмотримъ послѣдовательно всѣ типы замкнутыхъ группъ въ томъ порядке, какъ онъ перечислены въ § 99 и покажемъ для нихъ видъ $3n-s$ независимыхъ интеграловъ $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{3n-s}$ ур. (6). Желая въ каждомъ частномъ случаѣ определить функции φ , мы можемъ выбирать независимые основные винты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ данной замкнутой группы такъ, чтобы ур. $X_k f = 0$ по возможности упрощались.

Группа (1, I, 0) $o = a_0 \alpha$. Принимая ось винта α за ось z , полагая $\alpha = \alpha_1$, имѣемъ $p_i = q_i = a_i = b_i = 0$, $c_i = c, r_i = 1$, где c есть параметръ винта $\alpha = \alpha_1$, и

$$X_1 f = \sum (x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x}) + c \sum \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Легко провѣрить, что это ур. имѣетъ слѣдующіе $3n-1$ независимые интегралы:

$$\left. \begin{array}{l} x_i \operatorname{cs} \frac{z_1}{c} + y_i \operatorname{sn} \frac{z_1}{c}, \\ x_i \operatorname{sn} \frac{z_1}{c} - y_i \operatorname{cs} \frac{z_1}{c}, \\ z_i - z_1. \end{array} \right\} i = 1, 2, \dots, n$$

Группа (1, I, 1) $o = \omega a_1 \alpha$. Рассматривая этотъ случай какъ частный случай предыдущаго ($c = \infty$), имѣемъ:

$$X_1 f = \sum \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

и интегралы

$$\begin{array}{ll} x_i, y_i & i = 1, 2, \dots, n \\ z_i - z_1 & i = 2, 3, \dots, n. \end{array}$$

Группа (2,I,1) $\varrho = \alpha\alpha$. Совместимъ ось z съ осью α и примемъ за основные винты α_1 и α_2 группы винтъ безконечно большого параметра и винтъ параметра нуль. Тогда имѣемъ $p_1 = q_1 = r_1 = a_1 = b_1 = 0, c_1 = 1; p_2 = q_2 = a_2 = b_2 = c_2 = 0, r_2 = 1$, и

$$X_1 f = \Sigma \frac{\partial f}{\partial z} = 0; X_2 f = \Sigma \left(x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} \right) = 0.$$

Эти ур. имѣютъ слѣдующіе интегралы

$$\begin{aligned} &\frac{z_i - z_1}{x_i + y_i}, & i = 2, 3, \dots, n \\ &x_i^2 + y_i^2, & i = 1, 2, \dots, n \\ &x_i x_k + y_i y_k, & i, k = 1, 2, \dots, n; i \neq k \end{aligned}$$

Замѣтимъ, что между функциями $x_i x_k + y_i y_k$ независимыхъ между собой и отъ функций $x_i^2 + y_i^2$ столько, сколько независимыхъ угловъ между n радиусами векторами на плоскости, т. е. $n-1$; слѣдовательно между предыдущими функциями $3n-2$ независимыхъ.

Группа (2,II,2) $\varrho = \omega a_1 \alpha + \omega b_1 \beta$. Плоскость, которой параллельны оси винтовъ, примемъ за плоскость xy , а за винты α_1, α_2 возьмемъ винты, которые имѣютъ своими осями оси x и y . Тогда $p_1 = q_1 = r_1 = b_1 = c_1 = 0, a_1 = 1; p_2 = q_2 = r_2 = a_2 = c_2 = 0, b_2 = 1$ и

$$X_1 f = \Sigma \frac{\partial f}{\partial x} = 0, X_2 f = \Sigma \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

$3n-2$ независимыхъ интеграла таковы

$$\begin{aligned} &x_i - x_1, y_i - y_1 & i = 2, 3, \dots, n \\ &z_i & i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Группа (3,III,2) $\varrho = \omega a_1 \alpha + \omega b_1 \beta + c_0 \gamma$, при чемъ оси α и β перпендикулярны къ оси γ . Примемъ какой либо винтъ группы конечного параметра за α , и совместимъ съ его осью ось z ; за винты α_1 и α_2 возьмемъ винты безконечно большого параметра, имѣющіе своими осями оси x и y . Тогда $a_1 = 1, b_1 = 1, r_1 = 1, c_1 = c$, остальные координаты винтовъ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ равны нулю, и

$$\begin{aligned} &X_1 f = \Sigma \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad X_2 f = \Sigma \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ &X_3 f = \Sigma \left(x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} \right) + c \Sigma \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Эти ур. имѣютъ слѣдующіе $3n-3$ независимые интегралы:

$$\left. \begin{array}{l} (x_i - x_1) \operatorname{cs} \frac{z_1}{c} + (y_i - y_1) \operatorname{sn} \frac{z_1}{c} \\ (x_i - x_1) \operatorname{sn} \frac{z_1}{c} - (y_i - y_1) \operatorname{cs} \frac{z_1}{c} \end{array} \right\}_{i=2,3,\dots,n}$$

$$z_i - z_1$$

Группа (3,III,0) $\phi = \alpha_o \alpha + b_o \beta + c_o \gamma$, при чмъ ось винтовъ α, β, γ всѣ пересѣкаются въ одной точкѣ и параметры ихъ равны нулю. Примемъ центръ связки за начало координатъ и за винты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ возьмемъ винты, имѣющіе своими осями оси координатъ. Тогда $p_1 = 1, q_2 = 1, r_3 = 1$, остальные координаты равны нулю, и

$$\begin{aligned} X_1 f &= \Sigma \left(y \frac{\partial f}{\partial z} - z \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0, \quad X_2 f = \Sigma \left(z \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial z} \right) = 0 \\ X_3 f &= \Sigma \left(x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Эта система имѣетъ слѣдующіе интегралы:

$$\begin{aligned} x_i^2 + y_i^2 + z_i^2, \quad i=1,2,\dots,n \\ x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k, \quad i,k=1,2,\dots,n; \quad i \neq k. \end{aligned}$$

Функцій $x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k$ независимыхъ между собой и отъ функцій $x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$ столько, сколько независимыхъ угловъ между n радиусами векторами, т. е. $2n-3$; слѣдовательно, указанныя функции образуютъ систему $3n-3$ независимыхъ интеграловъ.

Группа (4,III,3) $\phi = \omega a_1 \alpha + \omega b_1 \beta + c \gamma$. Примемъ ось γ за ось z , за винты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ возьмемъ винты безконечно большого параметра, осями которымъ служатъ оси координатъ, а за винтъ α_4 винтъ параметра нуль, имѣющій осью ось x . Тогда $a_1 = b_1 = c_3 = r_4 = 1$, остальные координаты винтовъ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ равны нулю, и

$$\begin{aligned} X_1 f &= \Sigma \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad X_2 f = \Sigma \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad X_3 f = \Sigma \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \\ X_4 f &= \Sigma \left(x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned}$$

$3n-4$ независимые интегралы этихъ ур. таковы:

$$\left. \begin{aligned} & (x_i - x_1)^2 + (y_i - y_1)^2 + (z_i - z_1)^2 \\ & (x_i - x)(x_k - x_i) + (y_i - y_1)(y_k - y_1) + (z_i - z_1)(z_k - z_1) \end{aligned} \right\} \quad i=2,3\dots n$$

$$i,k=2,3\dots n; i \neq k.$$

Группа (6.III,3) $\varrho = aa + b\beta + c\gamma$. Примемъ за винты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ винты безконечно большого параметра и за винты $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ — винты параметра нуль, имѣющіе своими осями оси координатъ. Тогда $a_1 = b_2 = c_3 = p_4 = q_5 = r_6 = 1$, остальные координаты равны нулю и

$$\begin{aligned} X_1 f &= \Sigma \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad X_2 f = \Sigma \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad X_3 f = \Sigma \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \\ X_4 f &= \Sigma (y \frac{\partial f}{\partial z} - z \frac{\partial f}{\partial y}) = 0, \quad X_5 f = \Sigma (z \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial z}) = 0, \\ X_6 f &= \Sigma (x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x}) = 0. \end{aligned}$$

Независимые $3n-6$ интеграловъ этихъ ур. таковы:

$$\begin{aligned} & (x_i - x_1)^2 + (y_i - y_1)^2 + (z_i - z_1)^2, \quad i=2,3\dots n \\ & (x_i - x_1)(x_k - x_1) + (y_i - y_1)(y_k - y_1) + \\ & \quad + (z_i - z_1)(z_k - z_1). \quad i,k=2,3\dots n; i \neq k. \end{aligned}$$

105. Силовые винты. Пусть къ точкамъ системы приложены силы (X_i, Y_i, Z_i) ($i=1, 2, \dots, n$) при чмъ X_i, Y_i, Z_i суть нѣкоторыя функции отъ координатъ точекъ системы и могутъ зависѣть также отъ времени и скоростей точекъ.

Координаты силового бивектора будуть

$$\begin{aligned} X &= \Sigma X_i, \quad Y = \Sigma Y_i, \quad Z = \Sigma Z_i \\ L &= \Sigma (yZ - zY), \quad M = \Sigma (zX - xZ), \quad N = \Sigma (xY - yX) \end{aligned}$$

Если для всѣхъ возможныхъ положеній системы силовой бивекторъ будетъ взаименъ съ винтомъ $\alpha_1(p_1, q_1, r_1, a_1, b_1, c_1)$, то

$$a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + p_1 L + q_1 M + r_1 N = 0 \quad (7)$$

для всѣхъ возможныхъ значеній координатъ x_i, y_i, z_i . Изъ приведенного условия взаимности винтовъ α_1 и силового легко выводится слѣдующая извѣстная

Теорема I. Если винтъ (X, Y, Z, L, M, N) взаименъ съ винтами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, то онъ взаименъ и со всѣми винтами группы, ими опредѣляемой.

Эта теорема справедлива, будуть ли силы, приложенные къ точкамъ системы, обладать потенциаломъ или нѣтъ. Напротивъ, слѣдующія теоремы имѣютъ мѣсто только тогда, когда силы обладаютъ потенциаломъ U , такъ что

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i} \quad i=1, 2, \dots, n$$

Въ этомъ случаѣ условіе взаимности (7) винта α_1 съ силовымъ примѣтъ видъ $X_1 U = 0$, гдѣ $X_1 U$ есть выраженіе, въ которое обращается $X_1 f$ (5), когда функцию f замѣнимъ черезъ U .

Допустимъ, что силовой винтъ для всѣхъ возможныхъ положеній системы взаименъ не только съ α_1 , но и съ винтомъ $\alpha_2(p_2, q_2, r_2, a_2, b_2, c_2)$. Тогда функция силъ будетъ удовлетворять двумъ ур. $X_1 U = 0$ и $X_2 U = 0$, гдѣ $X_2 U$ получается изъ $X_1 U$ замѣнной у буквъ p, q, r, a, b, c значковъ 1 значками 2. Функция U будетъ удовлетворять, слѣдовательно, и ур. $(X_1 X_2) U = 0$, такъ что припоминая выраженіе $(X_1 X_2)$, имѣемъ теорему:

Теорема II. Если силы обладаютъ потенциаломъ и для всѣхъ возможныхъ положеній точекъ системы силовые винты взаимны съ винтами α_1 и α_2 , то для тѣхъ же положеній они будутъ взаимны и съ винтомъ $V_{\alpha_1 \alpha_2}$.

Подобно тому, какъ изъ теоремы II § 103 была получена теорема III § 103, такъ теперь изъ теоремы II вытекаетъ

Теорема III. Если силы обладаютъ потенциаломъ, то совокупность всѣхъ винтовъ, взаимныхъ съ силовыми, образуютъ замкнутую группу.

Отсюда слѣдуетъ, что силовые винты для консервативной системы могутъ образовать только группу взаимную съ замкнутой, т. е. группу одного изъ тѣхъ типовъ, которые приведены въ правой половинѣ таблицы § 99.

Теорема IV. Всегда можно подобрать такую функцию силъ, чтобы совокупностью всѣхъ винтовъ, взаимныхъ съ силовыми винтами, была данная замкнутая группа.

Дѣйствительно, пусть независимые винты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ опредѣляютъ замкнутую s -членную группу и пусть U есть иско-мая функция силъ. Для того, чтобы силовые винты были вза-

имы съ данной группой необходимо и достаточно, чтобы U удовлетворяла ур.

$$X_k U = 0 \quad (k=1,2,\dots,s) \quad (8)$$

тожественнымъ съ ур. (6) предыдущаго параграфа. При доказательствѣ теоремы IV § 103 мы видѣли, что система ур. (6) [или (8)] совмѣстна и имѣеть $3n-s$ независимыхъ интеграловъ. Наша теорема такимъ образомъ доказана. Въ § 104 мы проинтегрировали ур. (6), поэтому мы можемъ воспользоваться результатами этого §, чтобы для каждой данной замкнутой группы написать общий видъ функции силъ.

Прапоминая механическое значение условія взаимности двухъ винтовъ, мы можемъ теоремы III и IV соединить въ одну:

Теорема V. Если силы обладаютъ потенциаломъ, то совокупность винтовыхъ движений, при которыхъ работа силъ равна нулю образуетъ группу движений. Обратно, какую бы группу движений мы ни взяли, всегда можно подобрать такую функцию силъ, что силы при всѣхъ движенияхъ группы работы производить не будутъ.

Сдѣлаемъ теперь нѣсколько замѣчаній по поводу теоремы III.

I. Если, изслѣдуя силовые винты, мы найдемъ, что совокупность всѣхъ винтовъ, взаимныхъ съ силовыми винтами, соответствующими всѣмъ возможнымъ положеніямъ системы, образуютъ разомкнутую группу, то силы, приложенные къ точкамъ системы, не имѣютъ потенциала. Такъ напримѣръ, если силовой винтъ для всѣхъ положеній системы одинъ и тотъ же, или всѣ силовые винты имѣютъ общую ось, то силы потенциаломъ не обладаютъ.

II. Пусть мы имѣемъ конгруэнцію двухъ линейныхъ комплексовъ. Она опредѣляется нѣкоторой двучленной группой и можетъ быть рассматриваема какъ совокупность винтовъ параметра нуль взаимныхъ съ этой послѣдней. Предположимъ, что силы, приложенные къ точкамъ системы, дѣйствуютъ по лучамъ конгруэнціи и разсмотримъ какой видъ должна имѣть конгруэнція для того, чтобы силы могли обладать потенциаломъ. Каждую изъ силъ, приложенныхъ къ отдельной точкѣ системы, можемъ рассматривать какъ бивекторъ пара-

метра нуль, а силовой бивекторъ для всей системы какъ сумму такихъ бивекторовъ. Каждый изъ нихъ взаименъ съ группой, опредѣляющей конгруэнцію, съ этой группой будетъ взаименъ слѣдовательно и силовой винтъ всей системы. Поэтому, чтобы силы могли обладать потенціаломъ, группа, опредѣляющая конгруэнцію, должна быть замкнутой. Но обращаясь къ таблицѣ замкнутыхъ групп, видимъ, что существуетъ только двѣ двучленные замкнутые группы: одноосная и группа винтовъ безконечно большого параметра. Въ первомъ случаѣ конгруэнція будетъ щеткой, во второмъ связкой параллельныхъ прямыхъ.

Замѣтимъ, что когда силы, приложенные къ точкамъ системы будутъ центральными съ общимъ центромъ, то и силовой винтъ всей системы будетъ имѣть параметръ равный нулю и ось его будетъ проходить черезъ центръ силъ. Силовые винты образуютъ, слѣдовательно, группу взаимную съ замкнутой группой типа (3,II,0) и силы могутъ обладать потенціаломъ. Лучи связи можемъ рассматривать какъ конгруэнцію двухъ линейныхъ комплексовъ (точнѣ, какъ часть конгруэнціи); такимъ образомъ имѣемъ теорему:

Теорема VI. Если силы, приложенные къ точкамъ, дѣйствуютъ по лучамъ конгруэнции двухъ линейныхъ комплексовъ, то они могутъ обладать потенціаломъ только тогда, когда конгруэнція будетъ или щеткой, или связкой, съ центромъ на конечномъ, или бесконечномъ, разстояніи.

Эта теорема будетъ справедлива, конечно, и въ томъ случаѣ, когда система состоитъ изъ одной точки. Теорема показываетъ намъ тогда, что три примѣра на опредѣленіе потенціала силы, приложенной къ точкѣ, которые даетъ г. Р. Appell въ своемъ курсѣ (*Traité de Mécanique*, Т. I, р. 107). представляютъ единственные случаи, когда сила, приложенная къ точкѣ, дѣйствуя по лучамъ конгруэнции двухъ линейныхъ комплексовъ, имѣетъ потенціалъ. Рассматривая систему, состоящую только изъ одной точки, можемъ, очевидно, формулировать предыдущую теорему такимъ образомъ.

Поверхности ортогональныя къ лучамъ конгруэнции двухъ линейныхъ комплексовъ существуютъ только тогда, когда конгруэнция будетъ или связкой, или щеткой.

Въ первомъ случаѣ поверхности будуть концентрическія сферы (система параллельныхъ плоскостей), а во второмъ круговые цилиндры съ общою осью.

106. Винтъ количествъ движенія. Законъ моментовъ бивектора количествъ движенія. Если m_i ($i = 1, 2, \dots, n$) суть массы точекъ системы, то бивекторъ количествъ движенія будетъ имѣть своими координатами выраженія:

$$\begin{aligned} \Sigma m x', & \quad \Sigma m y', & \quad \Sigma m z' \\ \Sigma m(yz' - zy'), & \quad \Sigma m(zx' - xz'), & \quad \Sigma m(xy' - yx'), \end{aligned}$$

гдѣ x'_i, y'_i, z'_i ($i = 1, 2, \dots, n$) суть производные по времени отъ координатъ точекъ системы.

Теорема. Если для системы возможенъ кинематический винтъ, то производная по времени отъ момента бивектора количествъ движенія относительно возможного винта равняется моменту силового бивектора относительно того же винта.

Если $\alpha_1, (p_1, q_1, r_1, a_1, b_1, c_1)$ возможный винтъ, то перемѣщенія, опредѣляемыя формулами (3) § 103 будутъ возможными перемѣщеніями. Внося ихъ въ формулу, выражающую принципъ D'Alembert'a, получаемъ

$$\frac{dS_1}{dt} = a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + p_1 L + q_1 M + r_1 N, \quad (9)$$

гдѣ

$$S_1 = a_1 \Sigma m x' + b_1 \Sigma m y' + c_1 \Sigma m z' \\ + p_1 \Sigma m(yz' - zy') + q_1 \Sigma m(zx' - xz') + r_1 \Sigma m(xy' - yx'). \quad (10)$$

Равенство (9) и выражаетъ теорему

Если для системы возможна з-членная группа, то будемъ имѣть s независимыхъ ур. вида (9), совокупность которыхъ можно назвать закономъ моментовъ бивектора количествъ движенія относительно возможныхъ винтовъ. Въ частномъ случаѣ, когда возможная группа будетъ типа (3, III, 3) эти ур. обратятся въ ур., выражающія законъ движенія центра тяжести, когда возможная группа будетъ типа (3, III, 0) и параметры всѣхъ винтовъ будутъ равны нулю, то ур. будутъ выражать законъ моментовъ количествъ движенія.

107. *Винтовой интегралъ.* Если силовой винтъ будетъ взаименъ съ возможнымъ винтомъ, то вторая часть ур. (9) обратится въ нуль и мы получаемъ интегралъ

$$S_1 = \text{const.}$$

Интегралы такого вида будемъ называть винтовыми интегралами; винтъ α_1 , его ось и параметр—винтомъ, осью и параметромъ интеграла. Такимъ образомъ имѣемъ теорему:

Теорема. *Если силовой винтъ взаименъ съ винтомъ возможнымъ, то существуетъ винтовой интегралъ для возможного винта.*

Винтовой интегралъ, въ частномъ случаѣ, когда параметръ его бесконечно великъ, $R\alpha_1 = \infty$, обращается въ интегралъ, который выражаетъ законъ сохраненія движенія центра тяжести по направлению оси α_1 и можетъ быть названъ поступательнымъ интеграломъ. Если же $R\alpha_1 = 0$, то винтовой интегралъ обращается въ интеграль площадей для плоскости съ осью α_1 и можетъ быть названъ вращательнымъ интеграломъ. Принявъ ось α_1 за ось z , мы видимъ, что винтовой интегралъ

$$S_1 = \Sigma m(xy' - yx') + R\alpha_1 \cdot \Sigma mz' = \text{const.} \quad (11)$$

имѣеть слѣдующій смыслъ: сумма произведеній массъ точекъ на площади, которая описываетъ проекціи радиусовъ векторовъ, проведенныхъ отъ точекъ на оси интеграла къ точкамъ системы, на плоскость перпендикулярную къ оси, сложенная съ разстояніемъ центра тяжести системы отъ этой плоскости, умноженнымъ на массу системы и на параметръ, растетъ пропорционально времени

Интегралъ (11) можемъ представить еще въ двухъ различныхъ формахъ. Вообразимъ вокругъ оси интеграла круговой цилиндръ съ радиусомъ равнымъ по абсолютной величинѣ (для простоты) параметру интеграла и проведемъ на немъ винтовую линію съ шагомъ $2\pi R\alpha_1$. Помѣстимъ на этой линіи двѣ точки $M(\xi, \eta, \zeta)$ и $M_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ съ массами M и M_1 и заставимъ ихъ двигаться по ней такъ, чтобы

$$M_1(\xi_1 \eta'_1 - \eta_1 \xi'_1) = \Sigma m(xy' - yx'),$$

$$M\zeta = \Sigma mz.$$

Тогда интеграль (11) можемъ представить или въ видѣ:

$$\frac{d}{dt}(\Sigma m z + M_1 \zeta_1) = \text{const.},$$

или въ видѣ:

$$\Sigma m(xy' - yx') + M(\xi\eta' - \eta\xi') = \text{const.}$$

такъ что винтовой интеграль можно разсматривать или какъ интеграль, выражающей законъ сохраненія центра тяжести, если въ систему включимъ точку M_1 , или какъ интеграль площадей, если въ систему включимъ точку M .

108. Системы винтовыхъ интеграловъ Означимъ черезъ $p_i, q_i, r_i, a_i, b_i, c_i$ координаты бивектора a_i ; и черезъ S_i выражение, въ которое переходитъ (10), если у буквъ p, q, r, a, b, c значекъ 1 замѣнимъ значкомъ i . Если винты a_1, a_2, \dots, a_s будутъ между собой независимы, то и винтовые интегралы $S_i = \text{const.}$ ($i = 1, 2, \dots, s$) будутъ независимы, ибо предположеніе, что между ними существуетъ соотношеніе вида $\Sigma e_i S_i = 0$, гдѣ e_i ($i = 1, 2, \dots, s$) нѣкоторыя постоянныя числа, влечетъ за собой равенства:

$$e_1 a_1 + e_2 a_2 + \dots + e_s a_s = 0.$$

$$\dots \dots \dots \dots$$

$$e_1 p_1 + e_2 p_2 + \dots + e_s p_s = 0,$$

$$\dots \dots \dots \dots$$

невозможныя вслѣдствіе независимости винтовъ a_1, a_2, \dots, a_s .

Легко видѣть, что винтовой интегралъ $\Sigma e_i S_i = \text{const.}$ соответствуетъ винту $\alpha = e_1 a_1 + e_2 a_2 + \dots + e_s a_s$; слѣдовательно, выбирая надлежащимъ образомъ числа e , мы можемъ линейной комбинаціей интеграловъ, соответствующихъ винтамъ a_1, a_2, \dots составить интеграль для каждого винта группы, ими опредѣляемой. Итакъ имѣемъ теорему:

Теорема I. Если винты a_1, a_2, \dots независимы, то винтовые интегралы, отпечающіе имъ, также независимы. Линейной комбинаціей этихъ интеграловъ можно составить интегралъ для каждого винта группы, опредѣляемой винтами a_1, a_2, \dots

Эта теорема даетъ возможность геометрическихъ свойствъ группъ винтовъ толковать извѣстнымъ образомъ какъ свойства системъ винтовыхъ интеграловъ. Такъ, легко показать слѣдующее.

1. Линейной комбинаціей двухъ винтовыхъ интеграловъ можно составить два независимыхъ между собой интеграла одинакового параметра, напр., два интеграла площадей.

2. Изъ трехъ винтовыхъ интеграловъ можно составить ∞^1 интеграловъ одинакового параметра. Оси ихъ будутъ образующими одного рода линейчатой поверхности второго порядка.

3. Изъ четырехъ интеграловъ можно составить ∞^3 интеграловъ одинакового параметра. Оси ихъ будутъ лучами конгруэнціи двухъ линейныхъ комплексовъ. Такъ какъ въ четырехчленную группу винтовъ входитъ по крайней мѣрѣ одинъ винтъ безконечно большого параметра, то изъ четырехъ интеграловъ можно составить по крайней мѣрѣ одинъ поступательный интеграль.

4. Линейными комбинаціями пяти интеграловъ можно составить ∞^3 интеграловъ одинакового параметра. Оси ихъ образуютъ линейный комплексъ. Въ этомъ случаѣ можно получить по крайней мѣрѣ два независимыхъ между собой поступательныхъ интеграла.

5. Изъ шести независимыхъ винтовыхъ интеграловъ можно составить какой угодно винтовой интеграль.

Изъ послѣдней теоремы и теоремы предъидущаго параграфа вытекаетъ слѣдующая.

Теорема I₀. *Если для системы возможна з-членная группа и силовые винты принадлежатъ къ группѣ взаимной, то будемъ имѣть ∞^{3-1} винтовыхъ интеграловъ, соответствующихъ возможнымъ винтамъ. Между ними можно найти з независимыхъ, остальные получаются линейной комбинаціей этихъ послѣднихъ *).*

Предъидущія теоремы имѣютъ мѣсто независимо отъ того, будетъ ли система голономна и консервативна, или нѣтъ. Мы перейдемъ теперь къ изученію винтовыхъ интеграловъ

*) Эта теорема, а также теорема предъидущаго параграфа, принадлежатъ г. V. Cerruti (l. c.). Онѣ были получены мной независимо въ декабрѣ 1893 г. Тогда же, не зная о работахъ г. Cerruti, я послалъ замѣтку о винтовыхъ интегралахъ въ Comptes Rendus (l. c.).

въ предположеніи, что система голономна, а силы, приложенные къ точкамъ системы, обладаютъ потенціаломъ.

Пусть α_1 и α_2 два возможныхъ винта и путь силовые винты съ ними взаимны. Мы будемъ имѣть тогда два винтовыхъ интеграла:

$$S_1 = \text{const.}, \quad S_2 = \text{const.}$$

Говоря о возможныхъ винтахъ, мы видѣли, что въ случаѣ голономной системы винтъ $V\alpha_1\alpha_2$ будетъ также возможнымъ (теор. II § 103). Кромѣ того, когда силы обладаютъ потенціаломъ, силовой винтъ будетъ взаименъ съ винтомъ $V\alpha_1\alpha_2$ (теор. II § 105). Такимъ образомъ винтъ $V\alpha_1\alpha_2$ будетъ возможнымъ винтомъ взаимнымъ съ силовыми винтами, а потому по теоремѣ § 107 кромѣ двухъ предыдущихъ интеграловъ мы будемъ имѣть еще одинъ винтовой интеграль

$$S_3 = \text{const.}$$

для винта $V\alpha_1\alpha_2$. Итакъ мы приходимъ къ теоремѣ:

Теорема II. Если система голономна и консервативна и уравненія движенія импютъ два винтовыхъ интеграла для винтовъ α_1 и α_2 , то они импютъ и третій винтовой интегралъ для винта $V\alpha_1\alpha_2$.

Нетрудно показать, что эта теорема представляетъ теорему Poisson'a въ примѣненіи къ винтовымъ интеграламъ и есть частный случай слѣдующей болѣе общей.

Теорема II. Если $S_1 = \text{const.}$ есть винтовой интегралъ и $F = \text{const.}$ какой либо другой интегралъ ур. движенія, то $(S_1, F) = \text{const.}$, ідѣ (S_1, F) скобки Poisson'a, также будетъ и интеграломъ ур. движенія.

Пусть $f_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, s$) суть условная ур., стѣсняю-щія свободу перемѣщенія точекъ, при чмъ функціи f_k зависятъ отъ координатъ точекъ системы и могутъ зависѣть также и отъ времени. На основаніи извѣстной теоремы: „если $\varphi = \text{const.}$ и $\psi = \text{const.}$ суть два интеграла ур. механики, если φ не зависитъ отъ времени и удовлетворяетъ ур. $(\varphi_k, f_k) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, s$), то $(\varphi, \psi) = \text{const.}$ будетъ интеграломъ тѣхъ же уравненій“ *), для доказательства теоремы достаточно пока-

*). И. В. Мещерскій. «О теоремѣ Пуассона при существованіи условныхъ уравненій». VIII съѣзда Русскихъ Ест. и Бр.

зать, что $(S_1, f_k) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, s$). Развивая подробнѣе эти равенства, получаемъ

$$(S_1, f_k) = X_1 f_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, s),$$

гдѣ $X_1 f$ есть выраженіе (5) § 102; такимъ образомъ уравн. $(S_1, f_k) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, s$) представляютъ условія необходимыя и достаточныя, чтобы винтъ α_1 винтового интеграла $S_1 = \text{const.}$ былъ возможенъ, условія, которыя удовлетворены уже въ силу того предположенія, что $S_1 = \text{const.}$ интеграль ур. движенія. Итакъ теорема доказана.

Изъ этой теоремы слѣдуетъ: если имѣемъ два винтовыхъ интеграла, $S_1 = \text{const.}$, $S_2 = \text{const.}$, для винтовъ α_1 и α_2 , то $(S_1, S_2) = \text{const.}$ будетъ также интеграломъ. Выполнивъ вычислениѳ скобокъ (S_1, S_2) на самомъ дѣлѣ, увидимъ, что $(S_1, S_2) = \text{const.}$ есть винтовой интеграль, отвѣщающій винту $V\alpha_1\alpha_2$. Такимъ образомъ снова приходимъ къ теоремѣ II. Изъ теоремы II слѣдуетъ:

Теорема III. *Если система голономна и консервативна, то совокупность винтовъ, для которыхъ существуютъ винтовые интегралы, образуетъ замкнутую группу.*

Теорема доказывается совершенно также, какъ и теорема III § 103.

Теорема IV. *Существуютъ такія голономныя консервативныя системы, у которыхъ все винтовые интегралы соотвѣтствуютъ винтамъ данной замкнутой группы винтовъ.*

Теорема слѣдуетъ изъ теоремъ IV § 103 и IV § 105.

Теорема V. *Совокупность движений, опредѣляемыхъ винтами винтовыхъ интеграловъ для голономной консервативной системы, образуетъ группу движений.*

Теорема слѣдуетъ изъ теоремы III и теоремы II § 101.

109. *Опредѣленіе всѣхъ винтовыхъ интеграловъ по двумъ, или несколькимъ, данными.*

Въ предыдущемъ § было показано, что мы имѣемъ два средства по двумъ или несколькимъ винтовымъ интеграламъ получать еще другіе винтовые интегралы: или комбинируя данные интегралы линейно, или комбинируя ихъ помошью скобокъ Poisson'a. Первый пріемъ не даетъ намъ новыхъ интеграловъ, независимыхъ отъ данныхъ, и можетъ служить только для того, чтобы между возможными для данной системой

мы винтовыми интегралами выбрать наиболее простые, изъ которых другіе получались бы линейными комбинаціями. Напротивъ, составляя изъ данныхъ винтовыхъ интеграловъ новые помошью скобокъ Poisson'a, можемъ получить интегралы, независимые отъ данныхъ. Если припомнить, что $V\alpha_1\alpha_2$ обращается въ нуль только въ двухъ случаяхъ: 1) когда оси α_1 и α_2 совпадаютъ и 2) когда параметры обоихъ бивекторовъ безконечно велики (\S 41), что во всѣхъ остальныхъ случаяхъ $V\alpha_1\alpha_2$ независимъ отъ α_1 и α_2 , то будетъ ясно, что скобки Poisson'a обладаютъ слѣдующимъ свойствомъ:

Теорема. *Если оси винтовыхъ интеграловъ $S_1 = \text{const.}$ и $S_2 = \text{const.}$ совпадаютъ, или оба интеграла поступательны, то скобки Poisson'a, (S_1, S_2) , тождественно обращаются въ нуль и не даютъ новыхъ интеграловъ. Во всѣхъ остальныхъ случаяхъ уравнение $(S_1, S_2) = \text{const.}$ не будетъ тождествомъ, а винтовымъ интеграломъ независимымъ отъ интеграловъ $S_1 = \text{const.}$ и $S_2 = \text{const.}$.*

Такимъ образомъ, имѣя два винтовыхъ интеграла $S_1 = \text{const.}$ и $S_2 = \text{const.}$, можемъ составить новый независимый отъ нихъ винтовой интегралъ $S_3 = (S_1, S_2) = \text{const.}$ для винта $\alpha_3 = V\alpha_1\alpha_2$, интегралъ, который, вообще говоря, не будетъ тождествомъ. По тремъ интеграламъ $S_1 = \text{const.}$, $S_2 = \text{const.}$, $S_3 = \text{const.}$, комбинируя ихъ линейно, получимъ всевозможные интегралы для винтовъ группы $\alpha = e_1\alpha_1 + e_2\alpha_2 + e_3\alpha_3$. Если эта группа замкнута, то какую бы пару ея винтовъ α', α'' мы ни взяли векторное произведение $V\alpha'\alpha''$ будетъ принадлежать группѣ α , а потому, какую бы пару изъ всей совокупности полученныхъ винтовыхъ интеграловъ мы ни комбинировали помошью скобокъ Poisson'a, мы не найдемъ новыхъ интеграловъ, не принадлежащихъ той же совокупности и независимыхъ отъ трехъ $S_1 = \text{const.}$, $S_2 = \text{const.}$, $S_3 = \text{const.}$. Если же группа $\alpha = e_1\alpha_1 + e_2\alpha_2 + e_3\alpha_3$, разомкнута, то въ ней будутъ два винта α', α'' такихъ, что $\alpha_4 = V\alpha'\alpha''$ группѣ не принадлежитъ. Винтовой интегралъ $S_4 = \text{const.}$, отвѣчающій винту α_4 , интегралъ, который получимъ, комбинируя помошью скобокъ Poisson'a интегралы съ винтами α' и α'' , будетъ поэтому независимъ отъ интеграловъ $S_i = \text{const.}$ ($i = 1, 2, 3$), такъ что будемъ имѣть четыре независимыхъ винтовыхъ интеграла. Ихъ линейными комбинаціями составимъ интегралы для всѣхъ винтовъ четырехчленной группы $\alpha = e_1\alpha_1 + e_2\alpha_2 + e_3\alpha_3 + e_4\alpha_4$. Если эта группа зам-

кнута, то какую бы пару ея винтовъ α', α'' ни взяли, $V\alpha'\alpha''$ будетъ принадлежать той же группѣ α , а потому и комбинаціи вышеполученныхъ винтовыхъ интеграловъ помощью скобокъ Poisson'a не дадутъ памъ новыхъ, независимыхъ отъ четырехъ $S_i = const.$ ($i = 1, 2, 3, 4$) интеграловъ. Если же группа разомкнута, то получимъ пятый интегралъ $S_5 = const.$ независимый отъ предыдущихъ. Такъ какъ пятивленная группы всѣ разомкнуты, то комбинируя между собой помощью скобокъ Poisson'a пять интеграловъ $S_i = const.$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), навѣрно получимъ еще одинъ винтовой интеграль независимый отъ предыдущихъ, такъ что будемъ имѣть шесть винтовыхъ интеграловъ. Очевидно, что болѣе шести независимыхъ винтовыхъ интеграловъ быть не можетъ.

Итакъ, если система голономна и консервативна и мы имѣемъ два винтовыхъ интеграла, то строя помощью скобокъ Poisson'a все новые и новые интегралы, придемъ непремѣнно къ системѣ интеграловъ, винты которыхъ опредѣляютъ какуюнибудь замкнутую группу. Интересно задаться вопросомъ, какая именно системы интеграловъ получатся такимъ путемъ въ каждомъ частномъ случаѣ. Эта задача, очевидно, вполнѣ аналогична задачѣ § 100. Пользуясь, поэтому, результатами § 100, придемъ къ такимъ заключеніямъ.

A. 1. Если винтовые интегралы $S_1 = const.$ и $S_2 = const.$ поступательны, то скобки Poisson'a обращаются въ нуль, и новыхъ интеграловъ мы не получимъ. Проекція центра тяжести на плоскость параллельную осямъ интеграловъ будетъ двигаться прямолинейно и равномѣрно.

2. Если оси интеграловъ $S_1 = const.$ и $S_2 = const.$ совпадаютъ, то скобки Poisson'a тождественно обращаются въ нуль, и новыхъ интеграловъ не получимъ. Линейной комбинаціей данныхъ можемъ составить одинъ поступательный и одинъ вращательный интегралы. Проекція центра тяжести системы на общую ось интеграловъ будетъ двигаться равномѣрно.

B. Если параметры двухъ данныхъ интеграловъ конечны и оси ихъ параллельны, или, если параметръ одного изъ интеграловъ безконечно великъ и оси не параллельны, то винты интеграловъ опредѣлять группу типа (2, II, 1) $\rho = a_0\alpha + ab_0\beta$. Въ этомъ случаѣ результаты получаются различные, смотря по тому, будутъ ли оси α и β перпендикулярны или нѣтъ.

1. Когда параметры интеграловъ равны, или параметръ одного, напр. второго, $S_2 = \text{const.}$, безконечно велика и ось его перпендикулярна къ оси первого, то оси α и β будутъ перпендикулярны и скобки Poisson'a дадутъ намъ еще только одинъ винтовой интеграль $S_3 = \text{const.}$ независимый отъ данныхъ. Винты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ интеграловъ $S_i = \text{const.}$ ($i = 1, 2, 3$) опредѣлять замкнутую группу типа (3, III, 2). Такъ какъ въ ней два независимыхъ винта безконечно большого параметра, то линейной комбинаціей трехъ интеграловъ можемъ составить два независимыхъ между собой поступательныхъ интеграла. Третій независимый отъ этихъ двухъ будетъ $S_4 = \text{const.}$ съ конечнымъ параметромъ $R\alpha_1$. Проекція центра тяжести системы на плоскость перпендикулярную оси α_1 будетъ двигаться прямолинейно и равномѣрно.

2. Когда параметры интеграловъ не равны, или параметръ одного, напр. второго, $S_2 = \text{const.}$, безконечно велика и ось его не параллельна и не перпендикулярна къ оси первого, то оси α и β не будутъ взаимно перпендикулярны, и, комбинируя интегралы помошью скобокъ Poisson'a, получимъ еще два интеграла, $S_3 = \text{const.}$ и $S_4 = \text{const.}$, независимыхъ отъ данныхъ. Винты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ интеграловъ $S_i = \text{const.}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) опредѣлять замкнутую группу типа (4, III, 3). Такъ какъ въ группѣ три независимыхъ винта безконечно большого параметра и одинъ независимый отъ нихъ винтъ параметра вуль, то линейной комбинаціей этихъ четырехъ интеграловъ, можно составить четыре независимыхъ между собой интеграла, между которыми три поступательныхъ и одинъ вращателльный. Центръ тяжести будетъ двигаться прямолинейно и равномѣрно.

С. Если параметры данныхъ интеграловъ, $R\alpha_1, R\alpha_2$, конечны и оси не параллельны, то можетъ быть два случая.

1. Когда интегралы будутъ вращателльными, и оси ихъ пересѣкаются, то скобки Poisson'a даютъ намъ еще одинъ вращателльный интеграль $S_3 = \text{const.}$ Винты интеграловъ $S_i = \text{const.}$ ($i = 1, 2, 3$) опредѣлять замкнутую группу типа (3, III, 0) винтовъ параметра вуль. Какъ бы эти три интеграла мы ни комбинировали между собой, линейно, или помошью скобокъ Poisson'a, будемъ получать только интегралы площадей отъ нихъ зависимыя. Это случай Jacobi.

2. Во всѣхъ остальныхъ случаяхъ изъ двухъ винтовыхъ интеграловъ помощью скобокъ Poisson'a получимъ еще четыре независимыхъ отъ нихъ интеграла, винты которыхъ, вмѣстѣ съ винтами данныхъ, опредѣлять шестичленную группу, такъ что линейной комбинаціей всѣхъ шести интеграловъ можемъ составить всѣ возможные винтовые интегралы. Между ними можно взять за независимые три поступательныхъ и три вращательныхъ. Центръ тяжести системы будетъ двигаться прямолинейно и равномѣрно.

Предположимъ, что данная голономная консервативная система имѣеть три винтовыхъ интеграла $S_i = \text{const.}$ ($i = 1, 2, 3$). Если будемъ комбинировать ихъ между собой линейно, или помощью скобокъ Poisson'a, то можетъ представиться три случая [см. § 100].

1. Когда винты интеграловъ опредѣляютъ замкнутую трехчленную группу, указанными построеніями не получимъ новыхъ интеграловъ, независимыхъ отъ данныхъ. Таковъ, напр., случай трехъ независимыхъ поступательныхъ интеграловъ.

2. Когда винты интеграловъ опредѣляютъ трехчленную группу типа (3.III,2) $O = a_0\alpha + \omega b_1\beta + \omega c_1\gamma$, при чемъ оси β и γ перпендикулярны къ оси α , то скобки Poisson'a дадутъ еще одинъ независимый винтовой интегралъ $S_4 = \text{const.}$ Система $S_i = \text{const.}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) будетъ такого же типа, какъ и въ случаѣ В,2.

3. Во всѣхъ остальныхъ случаяхъ будемъ имѣть шесть винтовыхъ интеграловъ.

Если для данной голономной консервативной системы имѣемъ четыре винтовыхъ интеграла $S_i = \text{const.}$ ($i = 1, 2, 3, 4$), то можетъ быть два случая.

1. Когда винты интеграловъ опредѣляютъ замкнутую группу (4.III,3), новыхъ интеграловъ не получимъ.

2. Въ остальныхъ случаяхъ скобки Poisson'a дадутъ еще два независимыхъ интеграла.

Если для данной голономной консервативной системы имѣемъ пять винтовыхъ интеграловъ $S_i = \text{const.}$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), то комбинируя ихъ помощью скобокъ Poisson'a, получимъ непремѣнно и шестой винтовой интегралъ, отъ нихъ независимый.



СОДЕРЖАНИЕ.

	<i>Cmp.</i>
Предисловие	1.
ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.	
Глава I. Анализъ операций умноженія бивекторовъ.	
1. Бивекторъ и винтъ. 2. Формулы преобразованія координатъ бивектора. 3. Частные случаи. 4. Бивекторы кинематические и динамические. 5. Сложение и вычитаніе бивекторовъ.	10.
6. Умноженіе. 7—10. Скалярное произведение. 11—14. Векторное произведение. 15. Умноженіе бивектора на число. 16. Произведеніе. Символъ ω . 17 Свойства символа ω	16.
Глава II. Аналитическая теорія бикватерніоновъ.	
18. Комплексныя числа вида $a_0+\omega a_1, \omega^2=0$. 19. Функции отъ комплексныхъ чиселъ вида $a_0+\omega a_1$	33.
20. Бикватерніонъ. Сложение и вычитаніе. Скалярная и векторная части бикватерніона. 21. Умноженіе. Главная часть и моментъ бикватерніона. 22. Дѣленіе. Бикватерніонъ сопряженный и обратный. Норма бикватерніона. 23. Формулы развернутыя и неразвернутыя. 24. Параметръ и инвариантъ бикватерніона. 25. Тензоръ и верзоръ бикватерніона. 26. Уголь, поворотъ и шагъ бикватерніона. 27. Основныя формулы теоріи бикватерніоновъ. 28. Степень и логарифмъ бикватерніона. 29. Неразвернутыя формулы теоріи бикватерніоновъ . .	38.
Глава III. Геометрическая теорія бикватерніоновъ.	
30. Бивекторъ, его точка приведенія и ось. 31. Тензоръ и параметръ бивектора. 32. Бикватерніонъ, его ось и точка приведенія. 33. Умноженіе. Умноженіе бивектора на комплексное число $a=a_0+\omega a_1$. 34. Умноженіе бивектора на бивекторъ. Общія формулы. 35. Скаляр-	

Cmp.

- ное произведение. Основные формулы. 36. Комплексный угол между двумя прямыми в пространстве. 37. Формула $S_{\alpha\beta} = -T_\alpha T_\beta \cos\theta$. 38. Случай, когда $S_{\alpha\beta} = 0$. 39. Векторное произведение бивекторов. Основные формулы. 40. Тензоръ и параметръ $V_{\alpha\beta}$. 41. Случай, когда $PV_{\alpha\beta} = \infty$, или $V_{\alpha\beta} = 0$. 42. Ось $V_{\alpha\beta}$. 43. Формула $V_{\alpha\beta} = T_\alpha T_\beta \sin\theta$ 51.
44. Дѣленіе. Путь Clifford-Hamilton'a. 45. Основные формулы. 46. Бикватерніонъ, какъ частное. 47. Приведение бикватерніоновъ къ одному знаменателю, или числителю. Щетка. Одноштоточные или коллинеарные бикватерніоны. 48. Сложение, вычитание, умноженіе и дѣленіе бикватерніоновъ. 49. Разложение бикватерніоновъ на сумму двухъ. Геометрическое сначеніе знаковъ S и V и ихъ основного свойства. 50. Случай, когда $S\beta/\alpha = 0$, $PS\beta/\alpha = \infty$, $V\beta/\alpha = 0$, $PV\beta/\alpha = \infty$. Прямой бикватерніонъ. 51. Бикватерніонъ, какъ факторъ. 52. Элементарные бикватерніоны. 53. Разложение бикватерніона на множители. 54. Тензоръ и верзоръ бикватерніона и ихъ главное свойство. 55. Бикватерніоны, связанные съ данными. 56. Умноженіе бивектора α на бикватерніонъ q , ось которого пересекаетъ ось α подъ прямымъ угломъ. 57. Законъ коммутативности и ассоциативности сложенія и дистрибутивности сложенія и вычитанія. 58. Законъ ассоциативности умноженія. 59. Основные бикватерніоны. Алгебра щетки. 65.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

Глава I. Методъ перенесенія.

60. Методъ перенесенія или раздвиганія. 61. Преобразованіе теоремъ и формулъ геометріи съ элементомъ точка въ формулы и теоремы геометріи съ элементомъ бивекторъ. 62. Преобразованіе геометріи связи векторовъ въ теорію бивекторовъ. 63. Проекція винта и бивектора на ось. 64. Правоугольная комплексная координаты бивектора; координатные винты. 65. Геометрическое произведение двухъ бивекторовъ. Законъ дистрибутивности скалярного умноженія. 66. Щетка и ея ось. Ортогональная проекція бивектора на щетку. Законъ дистрибутивности векторного умноженія и обобщеніе теоремы Varignon'a. 67. Полярные координаты бивектора. 68. Формулы преобразованія координатъ. 69. Обобщеніе формулъ Euler'a. 70. Операция $q(\)q^{-1}$. 71. Обобщеніе формулъ Rodrigues-Euler'a, формулы Study. 72. Соотношенія между параметрами обобщенныхъ формулъ Euler'a и Rodrigues-Euler'a. 73. Новое начало координатъ. 74. Сложение конечныхъ винтовыхъ перемѣщений. 75. Нѣкоторыя слѣдствія изъ основной теоремы предыдущаго параграфа. 76. Обобщеніе доказательства Мбіуса о закона ассоциативности умноженія верзоръ-кватерніоновъ. 77. Выводъ нѣкоторыхъ формулъ теоріи кватерніоновъ. 78. Различия выраженія для $S_{\alpha\beta\gamma}$. 79. Случай, когда $S_{\alpha\beta\gamma} = 0$, или $PS_{\alpha\beta\gamma} = \infty$.

80. Косыя координаты бивектора и его составляющія; дополнительная координатная система. Зависимость между проекциями и составляющими бивектора. 81. Векторное и скалярное произведение и относительный момент двухъ бивекторовъ въ косыхъ координатахъ.	91.
82. Преобразование геометріи связки въ геометрію линейчатаго пространства. 83. Геометрія щетки, ангармоническое отношение четырехъ лучей щетки. 84. Преобразование теоремъ проективной геометріи связки въ теоремы линейчатаго пространства. Нѣкоторыя опредѣлениѧ. 85. Обобщеніе теоремъ Desargues'a. 86. Построеніе по тремъ даннымъ лучамъ щетки четвертаго гармоничнаго съ ними. 87. Проективная и перспективная щетки. 88. Конгруэнція, аналогичная конусу второго порядка. 89. Прямолинейное, плоское и сферическое многообразія бивекторовъ. 90. Преобразование геометріи сферического треугольника въ геометрію косого шестиугольника съ прямими углами. 91. Механика бивектора и системы бивекторовъ.	137.

Глава II. Группы вицеговъ.

92. Основные определения и теоремы теоріи группъ винтовъ. 93. Классификація группъ: каноническій видъ группы. 94. Группы одноосныя. 95. Группы двуосныя. 96. Группы трехъосныя. 97. Группы взаимныя. 98. Группы дополнительныя. 99. Группы замкнутыя и разомкнутыя. 100. Задачи: построить замкнутую группу, исходя отъ двухъ, или трехъ, данныхъ винтовъ. 101. Замкнутыя группы винтовъ и группы движений	164.
--	------

Глава III. Винтовые интегралы.

102. Определенія 103. Возможные винты. Голономныя системы. 104. Связи для замкнутыхъ возможныхъ группъ. 105. Силовые винты. 106. Винтъ количествъ движений. Законъ моментовъ бивектора количествъ движений. 107. Винтовой интеграль. 108. Системы винтовыхъ интеграловъ. 109. Определеніе всѣхъ винтовыхъ интеграловъ по двумъ, или нѣсколькимъ, даннымъ	193.
--	------



**Александр Петрович
КОТЕЛЬНИКОВ
(1865–1944)**

Выдающийся отечественный математик и механик, один из основоположников неевклидовой механики и геометрии пространства-времени. Закончил Казанский университет. Ученик крупных казанских математиков Ф. М. Суворова и А. В. Васильева. С 1888 по 1914 гг. преподавал в Казанском университете, где защитил магистерскую и докторскую диссертации. С 1924 по 1944 гг. руководил кафедрой теоретической механики Московского высшего технического училища (ныне МГТУ им. Н. Э. Баумана). Заслуженный деятель науки и техники РСФСР, лауреат Государственной премии.

А. П. Котельников заложил основы для построения векторного исчисления и механики в неевклидовых пространствах, а также исследовал связи геометрии Лобачевского с теорией относительности. Разработанный им математический аппарат винтового исчисления позволил обосновать исходные положения механики независимо от типа неевклидова пространства и найти важные геометрические приложения. Также им написаны работы по вопросам кинематики и динамики твердого тела, по теории гироскопов. Его труды оказали значительное влияние на развитие геометрии и теоретической механики.